Summer Homework 2015

■数学Ⅰ・Ａ＆数学Ⅱ・Ｂ■

数学Ⅰ・A

【１】数と式

$\boxed{1}$ 次の式を展開せよ。

(1) $(x-y+1)(x-y-2)$　(2) $(3x+y+2)(3x-y-2)$　(3) $(x+2y-1)^2$

$\boxed{2}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+2x+1-a^2$　(2) $(b-c)a^2+(c+a)b^2-(a+b)c^2$

$\boxed{3}$ $x=\sqrt{7}+\sqrt{3}$，$y=\sqrt{7}-\sqrt{3}$ とする。このとき，次の値を求めよ。

(1) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$　(2) $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$　(3) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}$　(4) $\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}$

【２】方程式と不等式

$\boxed{1}$ ２つの不等式 $\dfrac{5x-8}{2}\leqq 4x$，$3(x+1)<-2(x-12)$ を満たす整数のうち，最大のものと最小のものを求めよ。

$\boxed{2}$ a を定数とするとき，２次方程式 $x^2-2(a-1)x+1=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) ２次方程式が重解をもつとき，a の値と，そのときの重解 x の値を求めよ。

(2) ２次方程式の２つの解の比が１：４のときの a の値を求めよ。

$\boxed{3}$ ２次方程式 $x^2-2(a+1)x+a^2+2a-49=0$ の２つの解を $\alpha,\ \beta$（$\alpha<\beta$）とする。ただし，a は定数である。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha,\ \beta$ を a を用いて表せ。また，$\beta-\alpha$ の値を求めよ。

(2) $a=7$ のとき，$\alpha<m<\beta$ を満たす整数 m の個数を求めよ。

(3) $\alpha < n < \beta$ を満たす自然数 n がちょうど 10 個となるような整数 a の値を求めよ。

【3】２次関数

$\boxed{1}$ ２次関数 $y = x^2 - 8bx + 4c$ は，$x = 12$ のとき，最小値 -96 をとる。このときの b と c の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) ２次関数 $y = 3x^2 - 5x + 2 - c$ のグラフが x 軸と接するときの定数 c の値を求めよ。

(2) ２次関数 $y = 3x^2 - 7x - c$ のグラフが x 軸と異なる２点を共有するような定数 c の値の範囲を求めよ。

(3) ２次関数 $y = -2x^2 + x + 1 - c$ のグラフが x 軸と共有点をもたないような定数 c の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ a, b を定数とし，２次関数 $y = 5x^2 - ax + a + b - 13$ のグラフを C とする。グラフ C と x 軸とが異なる２つの共有点をもち，そのうち１つの x 座標が２であるとき，次の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) もう一方の共有点の x 座標が，区間 $-2 \leqq x \leqq 1$ に含まれるように a が変化するとき，グラフ C の頂点の y 座標の最大値を求めよ。

【4】図形と計量

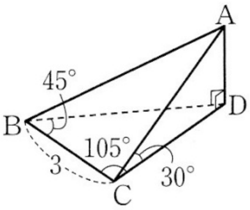
$\boxed{1}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = 7$，$\mathrm{AC} = 9$，$\cos\mathrm{A} = -\dfrac{1}{9}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) BC の長さを求めよ。　(2) 面積 S を求めよ。

(3) 外接円の半径 R を求めよ。　(4) 内接円の半径 r を求めよ。

$\boxed{2}$ 右の図のような三角錐 ABCD において，辺 AD は底面 BCD に垂直である。

$\mathrm{BC} = 3$，$\angle\mathrm{ACD} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{DBC} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{BCD} = 105^\circ$ のとき辺 AD の長さを求めよ。



$\boxed{3}$ $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{BC} = 3$，$\mathrm{CA} = \sqrt{13}$ とし，外接円を O とする。円 O の点 B を含まない孤 AC 上に点 D を $\mathrm{CD} = 3$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{ABC}$ の大きさを求めよ。

(2) ADの長さを求めよ。

(3) △ABDの面積をS_1，△BCDの面積をS_2とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ。

【5】集合と論理

$\boxed{1}$ 次の$\boxed{}$にあてはまるものを，下のア～エのうちから１つずつ選べ。

ア　必要十分条件である

イ　必要条件であるが，十分条件ではない

ウ　十分条件であるが，必要条件ではない

エ　必要条件でも十分条件でもない

(1) $xy=0$ は，$x=y=0$ であるための$\boxed{}$。

(2) xは実数とする。$\sqrt{x^2}+x=0$ は，$x \leqq 0$ であるための$\boxed{}$。

(3) aは実数とする。xについての２次方程式 $x^2+2ax+a=0$ において，$a \geqq 1$ であることは，この方程式が実数解をもつための$\boxed{}$。

$\boxed{2}$ １から 100 までの整数のうち，４の倍数でも６の倍数でもないものの個数を求めよ。

$\boxed{3}$ 実数a, bに関する条件p, qを次のように定める。

$p:(a-b)^2+(2a+b)^2<25$

$q:|a-b|<3$ または $|2a+b|<4$

次の問いに答えよ。

(1) 次のア～エのうち，命題「$q \Rightarrow p$」に対する反例となっているものを１つ選べ。

ア　$a=1,\ b=1$　　イ　$a=1,\ b=2$

ウ　$a=1,\ b=3$　　エ　$a=1,\ b=4$

(2) 命題「$(a-b)^2+(2a+b)^2<25 \ \Rightarrow\ |a-b|<3$ または $|2a+b|<4$」の対偶をを述べよ。

(3) 次の$\boxed{}$にあてはまるものを，下のア～エのうちから１つ選べ。

pはqであるための$\boxed{}$。

ア　必要十分条件である

イ　必要条件であるが，十分条件ではない

ウ　十分条件であるが，必要条件ではない

エ　必要条件でも十分条件でもない

【６】場合の数と確率

$\boxed{1}$ 男子４人と女子２人を，くじ引きで順番を決めて１列に並べる。次の問いに答えよ。

(1) 並び方は全部で何通りあるか。

(2) 女子２人が隣り合う確率を求めよ。

(3) 両端に男子が並ぶ確率を求めよ。

$\boxed{2}$ x 軸上を動く点Pがあり，最初は原点にあり，さいころを投げて，３以上の目が出れば正の方向に２だけ進み，２以下の目が出れば正の方向に１だけ進むとき，次の問いに答えよ。

(1) さいころを４回投げたとき，点Pの座標が７である確率を求めよ。

(2) さいころを２回投げたときの点Pの座標が３で，さらに２回投げたときの点Pの座標が７である確率を求めよ。

$\boxed{3}$ １から５までの数字が書かれた赤いカード５枚と，１から５までの数字が書かれた白いカード５枚がある。これら 10 枚のカードから，無作為に３枚のカードを取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 取り出されたカードがすべて赤いカードである確率を求めよ。

(2) 取り出されたカードに書かれた数字がすべて異なる確率を求めよ。

(3) 取り出されたカード１枚につき，次のように得点を定める。

・取り出されたカードが赤いカードの場合は，書かれた数字が m のとき，得点を m 点とする。

・取り出されたカードが白いカードの場合は，得点を０点とする。

取り出された３枚のカードの得点の合計が５点となる確率を求めよ。

【7】整数

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 180 と 560 の最大公約数および最小公倍数を求めよ。

(2) 正の整数 A, B（ただし，$A<B$）の最大公約数が 15，最小公倍数は 540 のとき，A, B の組 (A, B) をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 方程式 $7x-9y=5$ の整数解をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ m を整数とし，2 次方程式 $x^2-(m+1)x+2m+3=0$ の解を $x=\alpha, \beta$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

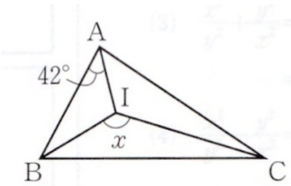
(1) $\alpha+\beta$ を m を用いて表せ。

(2) $\alpha\beta$ を m を用いて表せ。

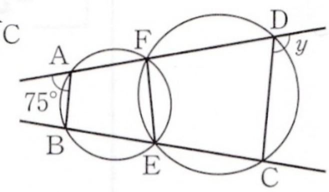
(3) α, β が整数となるような m の値をすべて求めよ。

【8】図形の性質

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

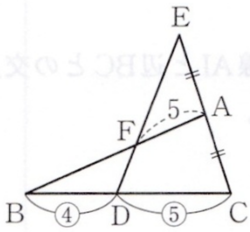


(1) 右の図で，I は△ABC の内心である。x の値を求めよ。



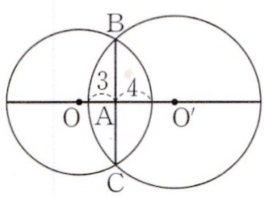
(2) 右の図の y の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。



(1) 右の図で，AC＝AE，BD : DC＝4 : 5，AF＝5 である。線分 FB の長さを求めよ。

(2) 右の図で，円 O の半径は 8 である。円 O′ の半径を求めよ。



$\boxed{3}$ $\angle A=90^\circ$ である直角三角形 ABC の内接円が，斜辺との接点で辺 BC を 3 : 2 に分割している。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{AB:AC}$ を求めよ。

(2) 内接円の中心を I とし，直線 AI と辺 BC との交点を K とする。このとき $\mathrm{AI:IK}$ を求めよ。

数学Ⅱ・B

【1】式と証明

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^3$ を展開せよ。　　(2) $(x-2)^5$ を展開したときの，x^3 と x^4 の項の係数を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $(2x+1)(x^2+ax+b)=2x^3+cx^2-x+2$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ。

(2) 整式 $\mathrm{P}(x)=2x^3-3x^2-11x+15$ が $\mathrm{Q}(x)=x^2+dx-3$ で割り切れ，商が $ex+f$ となった。定数 d, e, f の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 整式 $\mathrm{P}(x)$ を x^2+x-6 および x^2-x-12 で割ると，余りがそれぞれ $(a-4)x-1$ および $2ax+5a-1$ であるとする。ただし，a は定数とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) $\mathrm{P}(x)$ を $(x+3)(x^2-6x+8)$ で割った余りを求めよ。

【2】複素数と方程式

$\boxed{1}$ 次の等式が成り立つように，実数 x, y の値を定めよ。

(1) $(3+2i)(x+yi)=12-5i$　　(2) $\dfrac{x-2i}{1+i}=\dfrac{y+i}{3-i}$

$\boxed{2}$ ２次方程式 $3x^2-2x+1-k=0$ が２つの実数解 α, β をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha^3+\beta^3$ を k を用いて表せ。

(2) ２つの解の差が２となるように k の値を定めよ。

$\boxed{3}$ a, b, c が実数である３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は $2-i$ を解にもつ。ただし，i は虚数単位で

ある。

(1) $(2-i)^3$ を計算せよ。

(2) 係数 $b,\ c$ を a を用いて表せ。

(3) この方程式が $0<x<1$ の範囲に実数解をもつための a の条件を求めよ。

【3】図形と式

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=x+2$ 上に中心があり，２点 $\mathrm{A}(1,\ -1)$， $\mathrm{B}(5,\ 3)$ を通る円 C の方程式を求めよ。

(2) (1)の円 C と直線 $\ell: y=mx-1$ が共有点をもつとき， m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 実数 $x,\ y$ が次の不等式を満たしている。

$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ 2x+y \leqq 18,\ \ x+2y \leqq 12$

(1) 点 $(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ。　　(2) $x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 円 $x^2+y^2-14x-18y+105=0$ を C_1 とし， C_1 の中心を A とする。点 A を通り，傾き m （$m>0$）の直線を ℓ_1 とし，A を通り ℓ_1 と直交する直線を ℓ_2 とする。また，直線 ℓ_1 と y 軸との交点を P. 直線 ℓ_2 と x 軸との交点を Q とする。さらに３点 $\mathrm{A},\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}$ を通る円を C_2 とする。

(1) 円 C_1 の中心と半径を求めよ。

(2) 線分 PQ の中点の座標を求めよ。

(3) 円 C_2 の半径を求めよ。

(4) m を変化させたとき，円 C_2 の中心はある直線上にある。この直線の方程式を求めよ。

【4】三角関数

$\boxed{1}$ 次の方程式，不等式を解け。ただし， $0 \leqq x < 2\pi$ とする。

(1) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

(2) $2\sin^2 x - \sin x - 1 \leqq 0$

$\boxed{2}$ $\sin\alpha = \dfrac{1}{3},\ \sin\beta = \dfrac{1}{4}$ のとき，次の値を求めよ。ただし， $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ とする。

(1) $\cos\beta$　　(2) $\sin 2\alpha$　　(3) $\cos(\alpha-\beta)$

$\boxed{3}$ 関数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=t$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値と，そのときの x の値を求めよ。

【5】指数関数・対数関数

$\boxed{1}$ 次の方程式を解け。

(1) $2^{2x}-2^{x+1}-48=0$　　(2) $\log_2 x-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=1$

$\boxed{2}$ $-2\leqq x\leqq 0$ のとき，$y=9^x-2\cdot 3^{x-1}+1$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 5^{80} は何桁の数か求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$\boxed{4}$ $f(x)=\log_3(x+1)+\log_3(5-x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) x が $9^x-28\cdot 3^x+27<0$ を満たすとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき，$f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3) $f(x)>3-2\log_3 2$ の解を求めよ。

【6】微分法

$\boxed{1}$ $f(x)=-x^3+3x^2+3x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極値を求めよ。

(3) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

$\boxed{2}$ $x=-2$ で極大値 27，$x=1$ で極小値 0 をとるような x の３次関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $f(x)=-x^3+6x^2+a$ の極大値が 29 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の極小値を求めよ。

(3) $x^3-6x^2-a+k=0$ が異なる３つの実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ （$\alpha<\beta<\gamma$）をもつとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) k が(3)の範囲で変化するとき，β と γ のとりうる値の範囲を求めよ。

【7】積分法

$\boxed{1}$ 曲線 $y=|x^2-3x-4|$ について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線の概形をかけ。

(2) $x\geqq 0$ において，曲線と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，曲線と x 軸および直線 $x=5$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x+\int_0^1 6t\,f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_a^x f(t)\,dt=x^2-11x+30$ を満たす関数 $f(x)$ と，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{3}$ xy 平面上に放物線 $y=x^2-2x+4$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 原点からこの放物線に引いた２本の接線の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 放物線と２本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) ２接点を結ぶ線分と放物線とで囲まれた部分の面積を T とするとき，$S:T$ を求めよ。

【8】数列

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。

(1) 第４項が 17，第９項が 57 の等差数列について，一般項 a_n と初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) 正三角形 $\mathrm{A_1B_1C_1}$ の１辺の長さが１であるとする。
また，正三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の各辺の中点どうしを結んでできる正三角形を $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ とする。
正三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ の面積を S_n とするとき，$S_1+S_2+\cdots+S_n$ を n の式で表せ。

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n=5\cdot 2^n+2n^2+n-5$ で表されるとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。　　(2) 一般項 a_n を n の式で表せ。

$\boxed{3}$ 数列$\{a_n\}$が $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n-4n+6$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）で定義されるとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+2}-a_{n+1}$をa_n，a_{n+1}で表せ。

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）とおくとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

【9】ベクトル

$\boxed{1}$ $\triangle \mathrm{OAB}$において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$とする。

$\vec{a}+3\vec{b}$と$2\vec{a}-3\vec{b}$が垂直であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を求めよ。

(2) $\triangle \mathrm{OAB}$の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ $\triangle \mathrm{ABC}$の辺ABを$2:1$に内分する点をD，辺ACの中点をEとする。線分BEと線分CDの交点をF，直線AFと辺BCの交点をGとするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。辺OAを$4:3$に内分する点をP，辺BCを$5:3$に内分する点をQとするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$で表せ。

(2) 線分PQの中点をRとし，直線ARが$\triangle \mathrm{OBC}$の定める平面と交わる点をSとするとき，$\mathrm{AR}:\mathrm{RS}$を求めよ。

(3) $\cos\angle \mathrm{AOQ}$の値を求めよ。