HOCUS POCUS

この冊子は，夏期特訓講習用のテキストです。数学ⅠＡⅡＢまでの内容で，大学入試に通用する実戦力を養成するための問題が載っています。高校数学の中でも，数学ⅠＡⅡＢは学習量が成績に直結してくれないもどかしい科目です。その原因の１つは，同じ問題・同じように見える問題にも解き方がいろいろあり，どの方法で解くべきかの判断にそもそも実力が必要であることです。例えば，次の２次関数の問題を考えてみてください。

【問題１】２次関数 $y=2x^2-3x+m$ が x 軸と異なる２点で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ。

〔解答Ａ〕２次方程式 $2x^2-3x+m=0$ …① の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot m=9-8m$$

x 軸と異なる２点で交わるとき，①は異なる２つの実数解をもつので $D>0$ であるから

$9-8m>0$ より $m<\dfrac{9}{8}$

〔解答Ｂ〕$y=2x^2-3x+m$ を平方完成すると $y=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}+m$ …②

２次関数 $y=2x^2-3x+m$ が x 軸と異なる２点で交わるとき，

②の頂点の y 座標は負であるから $-\dfrac{9}{8}+m<0$ より $m<\dfrac{9}{8}$

もちろん，〔解答Ａ〕と〔解答Ｂ〕のどちらの解答も文句なしの正解となります。

私の経験上，〔解答Ａ〕のやり方で解く人が多いと思いますが，どうして「判別式 D」と「グラフの頂点の y 座標の符号」の考察が同じ結果を与えるのかについて説明しておきます。

$y=ax^2+bx+c$ を平方完成すると $y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ となることから

頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ となります。ここで頂点の y 座標に注目します。

グラフが下に凸である２次関数（つまり，$a>0$ である）において，

「頂点の y 座標が負」⇔「$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$」⇔「$b^2-4ac>0$」⇔「判別式 $D>0$」

となりますので，どちらでも同じことになるわけです。

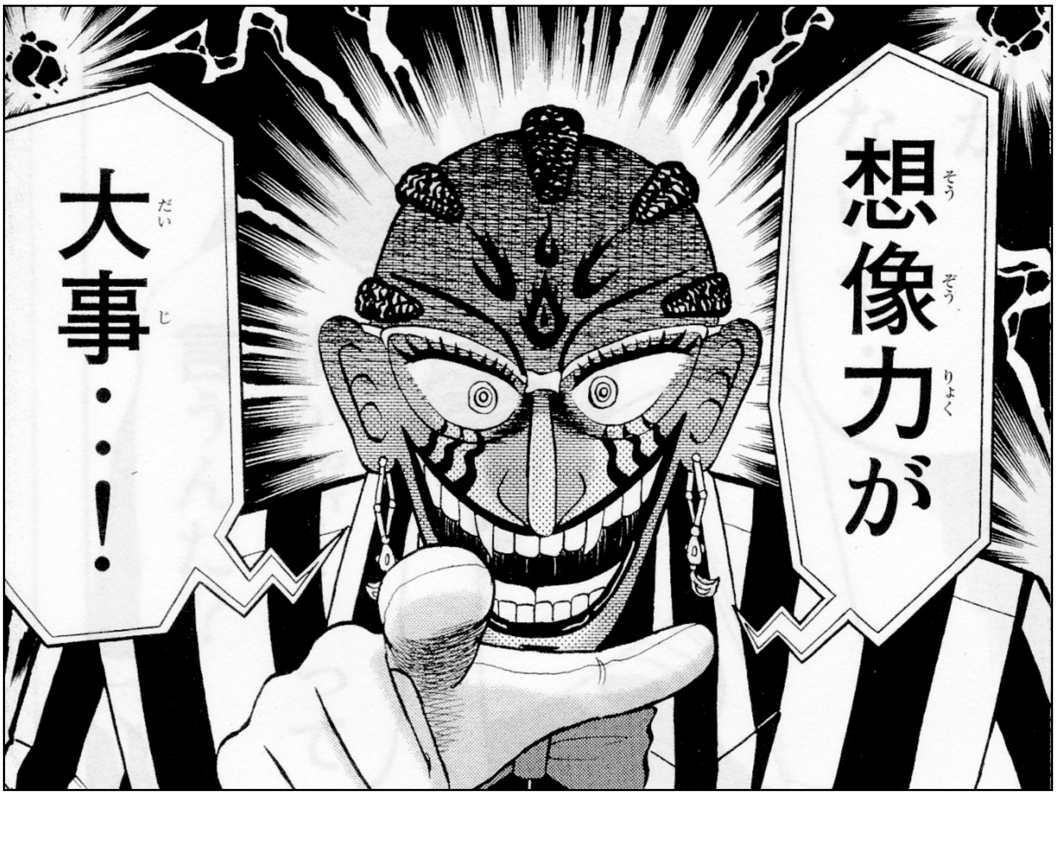
平方完成は，文字を含むような式ではやや面倒な計算ですので，しないで済むのであれば避けたい計算です。したがって，この問題では通常〔解答Ａ〕の方法が好まれますし，より良い解答と言えます。

しかし，問題が次のように変わったらどうでしょう。

【問題２】２次関数 $y=2x^2-3x+m$ の頂点の座標を求め，そのグラフが x 軸と異なる２点で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ。

問題２では「頂点の座標を求め」という部分が加わりました。こうなった場合，グラフの頂点を求めるために普通は平方完成をします（微分して頂点の x 座標を求める方法もありますが)。その上で，グラフが x 軸と異なる２点で交わるような定数 m の値の範囲を求めることになりますから，いまさら判別式 D を持ち出すまでもなく，頂点の y 座標の符号を考えて処理するべきでしょう。つまりこの場合〔解答Ｂ〕の方がより良い解答ということが言えます。

　いかがでしょう。ただ解ければ良い・答えらしきものが求まれば良いと考えている人はおそらくこれらの違いに興味はないでしょう。しかしながら，数学のデキルヒトはこういった解き方にもこだわって解いているのです。この特訓講習では，解き方にこだわって１問１問をしっかり考えていきます。



【１】

次の和を求めなさい。

（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

（2）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

（3）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$

（4）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$

（5）$\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left\{\sum_{\ell=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{\ell}k\right)\right\}$

〔補充問題１〕次の和を求めよ。

（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$　　（2）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

【2】

方程式 $|x^2-4x+3|-ax-1=0$ の相異なる実数解の個数を a の値によって分類せよ。

〔補充問題２〕

k を定数として，３次方程式 $x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x-k=0$ …（*）を考える。

(1) この方程式が，異なる３つの実数解をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}<k<\boxed{\text{イ}}$ …（**）

である。

(2) k が（**）の範囲にあるとき，方程式（*）の３つの解を α, β, γ（ただし，$\alpha<\beta<\gamma$） とおく。

(a) k が（**）の範囲を動くとき，α, β, γ の取りうる値の範囲は，それぞれ $\boxed{\text{ウ}}<\alpha<\boxed{\text{エ}}$,

$\boxed{\text{オ}}<\beta<\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}<\gamma<\boxed{\text{ク}}$ である。

(b) k が（**）の範囲を動くとき，α と γ の積 $\alpha\gamma$ が最小となるのは $k=\boxed{\text{ケ}}$ のときであって，

$\alpha\gamma$ の最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

〔2014 年・東京理科大（薬)〕

【３】

４人で１回じゃんけんをするとき，次の確率を求めよ。

(1) １人だけが勝つ。

(2) ２人だけが勝つ。

〔補充問題３〕

５人で１回じゃんけんをするとき，あいことなる確率を求めよ。

■じゃんけん追加問題１■

４人がじゃんけんをして，勝者が１人になるまで繰り返す。負けた人は次の回からは参加せず，あいこは１回と数えるものとする。

(1) １回目で勝者が決まる確率を求めよ。

(2) ２回目で勝者が決まる確率を求めよ。

■じゃんけん追加問題２■

３人でじゃんけんをして，勝者が１人になるまで繰り返す。負けた人は次の回からは参加せず，あいこは１回と数えるものとする。

(1) n 回目で勝者が決まる確率を求めよ。

(2) n 回目までに勝者が決まる確率を求めよ。

■じゃんけん追加問題３■

３人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない），勝ち残りが１人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。３人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回終了時に２人が残っている確率を p_n，３人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n がみたす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で１人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

〔2013 年・名古屋大（理系文系共通）

■じゃんけん追加問題４■

３人で‘ジャンケン’をして勝者を決めることにする。たとえば，１人が‘紙’を出し，他の２人が‘石’を出せば，ただ１回でちょうど１人の勝者がきまることになる。３人で‘ジャンケン’をして，負けた人は次の回にさんかしないことにして，ちょうど１人の勝者がきまるまで，‘ジャンケン’をくり返すことにする。このとき，k 回目に，はじめてちょうど１人の勝者がきまる確率を求めよ。

〔1971 年・東京大（理系）〕

【4】

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $10^4 < 2^k < 2 \cdot 10^4$ を満たす整数 k の値を求めよ。

(2) 2015 個の 2 の累乗 2^1，2^2，2^3，$\cdots$，2^{2014}，2^{2015} のうち，最高位の数字が 1 であるものの個数を求めよ。

［補充問題４］

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。〔2015 年・東大（理系）〕

【５】

正の整数からなる数列 $a_n = 13^n + 2\cdot 23^{n-1}$ について，

すべての a_n （$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に共通する素因数が存在することを示せ。

［補充問題５］

すべての正の整数 n に対して，$3^{3n-2} + 5^{3n-1}$ が 7 の倍数であることを証明せよ。〔2010 年・弘前大〕

■【５】追加問題■

すべての正の整数nに対して，$5^{n+1}+6^{2n-1}$は31で割り切れることを証明せよ。