Assist $\boxed{1-1}$

$\dfrac{5+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。$a,\ b$ の値をそれぞれ求めよ。また，$4b^3-6b^2-b+3$ の値を求めよ。

$\dfrac{5+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{5+2\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$ である。

ここで，$2<\sqrt{5}<3 \Leftrightarrow 7<5+\sqrt{5}<8 \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}<\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}<2$ より $a=1$

したがって $b=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}-1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ …①

また，①より $4b=1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 4b-1=\sqrt{5}$ …② であり，

②の両辺を２乗して $16b^2-8b+1=5 \Leftrightarrow 16b^2-8b-4=0 \Leftrightarrow 4b^2-2b-1=0$

$4b^3-6b^2-b+3=(4b^2-2b-1)(b-1)-2b+2$ と変形できるので

求める値は $-2\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}+2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Assist $\boxed{１－２}$

　６個の数字０，１，１，２，２，３を全部使って６桁の整数を作る。

(1) ６桁の整数は全部で何個できるか求めよ。

(2) ２０００００以上の整数は何個できるか求めよ。

---

(1) 先頭（十万の位）によって場合分けをする。

（ｉ）先頭が１のとき

万の位以下の５つの数字は「０，１，２，２，３」の順列の総数に等しいから $\dfrac{5!}{2!}=60$ 個

（ⅱ）先頭が２のとき

(ｉ)と同様にして 60 個

（ⅲ）先頭が３のとき

万の位以下の５つの数字は「０，１，１，２，２」の順列の総数に等しいから $\dfrac{5!}{2!2!}=30$ 個

（ｉ)，(ⅱ)，(ⅲ)より求める６桁の整数の個数は $60+60+30=150$ 個

(2)（ⅱ)，(ⅲ)の場合が該当するので

$60+30=90$ 個

Assist $\boxed{1-3}$

aは実数の定数とする。xの２次方程式 $x^2+ax+a^2=3$ …① がある。

(1) ①が実数解をもつようなaの値の範囲を求めよ。

(2) ①が正の実数解をもたないようなaの値の範囲を求めよ。

---

(1) ① $\Leftrightarrow$ $x^2+ax+a^2-3=0$ …②

②の判別式をDとすると，$D=a^2-4(a^2-3)=-3a^2+12$

①が実数解をもつとき，$D\geqq 0$であるから $-3a^2+12\geqq 0$ $\Leftrightarrow$ $a^2\leqq 4$

よって $-2\leqq a\leqq 2$

(2) ①の解が（重解を含めて）２つとも０以下であればよい。

$f(x)=x^2+ax+a^2-3$ とおくと

$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2-3$ より $y=f(x)$ のグラフの軸は $x=-\dfrac{a}{2}$

満たすべき条件は $\begin{cases} D\geqq 0 \\ -\dfrac{a}{2}\leqq 0 \\ f(0)\geqq 0 \end{cases}$ である。$f(0)=a^2-3\geqq 0$ $\Leftrightarrow$ $a\leqq -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\leqq a$

したがって $-2\leqq a\leqq 2$ かつ $a\geqq 0$ かつ $a\leqq -\sqrt{3},\ \sqrt{3}\leqq a$ より $\sqrt{3}\leqq a\leqq 2$

〔別解〕

②の２解を$\alpha,\ \beta$とおくと，

解と係数の関係より $\alpha+\beta=-a$，$\alpha\beta=a^2-3$

満たすべき条件は $\alpha,\ \beta$が実数 かつ $\alpha\leqq 0$ かつ $\beta\leqq 0$ であるから

$-2\leqq a\leqq 2$ かつ $-a\leqq 0$ かつ $a^2-3\geqq 0$

したがって $\sqrt{3}\leqq a\leqq 2$

Assist $\boxed{1-4}$

a は実数の定数とする。x の２次方程式　$x^2+ax+a^2>x+a+1$　…①　がある。

(1) すべての実数 x に対して①が成り立つような a の値の範囲を求めよ。

(2) ①が成り立たない整数 x が $x=0$ だけであるような a の値の範囲を求めよ。

---

(1) ①　$\Leftrightarrow$　$x^2+(a-1)x+a^2-a-1>0$　…②

ここで，２次方程式　$x^2+(a-1)x+a^2-a-1=0$　の判別式を D とすると

②がすべての実数 x に対して成り立つのは　$D<0$　のときである。

よって　$D=(a-1)^2-4(a^2-a-1)<0$

$$-3a^2+2a+5<0$$

$$3a^2-2a-5>0$$

$$(a+1)(3a-5)>0$$

したがって，求める a の値の範囲は　$a<-1,\ \dfrac{5}{3}<a$

(2)　$f(x)=x^2+(a-1)x+a^2-a-1$　とおく。

①が成り立たない整数 x が $x=0$ だけであるときに満たすべき条件は

$f(0)<0$　かつ　$f(-1)\geqq 0$　かつ　$f(1)\geqq 0$

であるから

$f(0)=a^2-a-1<0$　かつ　$f(-1)=a^2-2a+1\geqq 0$　かつ　$f(1)=a^2-1\geqq 0$

$a^2-2a+1=(a-1)^2\geqq 0$　はすべての実数 a で満たされるので

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　かつ　$a\leqq -1,\ 1\leqq a$　より　$1\leqq a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Assist $\boxed{1-5}$

６個の箱があり，１から６まで番号がついている。１個のサイコロを振り，出た目の数と同じ数のついた箱へ球を１個入れる。球を元に戻さずにこれを４回繰り返す。

(1) ４個の箱に１個ずつ球が入る確率を求めよ。

(2) ２個の箱に２個ずつ球が入る確率を求めよ。

すべての目の出方は6^4通りあり，これらの出方は同様に確からしい。

(1) ４個の箱に１個ずつ球が入る場合の数は

６個の異なる数字から４つを選んで並べる順列の総数と同じであるから ${}_6\mathrm{P}_4=6\cdot5\cdot4\cdot3$ 通り。

したがって，求める確率は $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4}=\dfrac{5}{18}$

(2) ２個の箱に２個ずつ球が入る場合の数は

６個の異なる数字から２つを選ぶ方法が${}_6\mathrm{C}_2$通りあり，

２個ずつある４つの数の順列の総数が$\dfrac{4!}{2!2!}$通りあるので，${}_6\mathrm{C}_2\times\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り。

したがって，求める確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_2\times\dfrac{4!}{2!2!}}{6^4}=\dfrac{5}{72}$

Assist $\boxed{2-1}$

(1) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{4\log_3\sqrt{2}}$ を簡単にせよ。

(2) 方程式 $\log_{x-1}(x^3-4x^2-x+4)=2$ を解け。

---

(1) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{4\log_3\sqrt{2}}=\left(3^{-3}\right)^{\log_3\sqrt{2}^4}=3^{-3\log_3 4}=3^{\log_3 4^{-3}}=4^{-3}=\dfrac{1}{64}$

(2) $\log_{x-1}(x^3-4x^2-x+4)=2$ …①

底の条件より $x-1\neq 0$ かつ $x-1>0$ より $x>1$ …②

真数は正であるから $x^3-4x^2-x+4>0 \iff (x-1)(x+1)(x-4)>0$ より $-1<x<1,\ x>4$ …③

②かつ③より $x>4$ …④

このもとで，① $\iff \log_{x-1}(x^3-4x^2-x+4)=\log_{x-1}(x-1)^2$

$\iff x^3-4x^2-x+4=(x-1)^2$

$\iff (x-1)(x+1)(x-4)=(x-1)^2$

④より $x-1\neq 0$ なので $(x+1)(x-4)=x-1 \iff x^2-4x-3=0$

④より $x=2+\sqrt{7}$

Assist $\boxed{2-2}$

三角形ABCにおいて，$\mathrm{BC}=5$, $\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{C}=\theta$ とする。

(1) $\mathrm{AB}=\boxed{\text{ア}}\sin\theta$, $\mathrm{CA}=\boxed{\text{イ}}\sin\theta+\boxed{\text{ウ}}\cos\theta$ である。

(2) 三角形ABCの面積をSとすると，

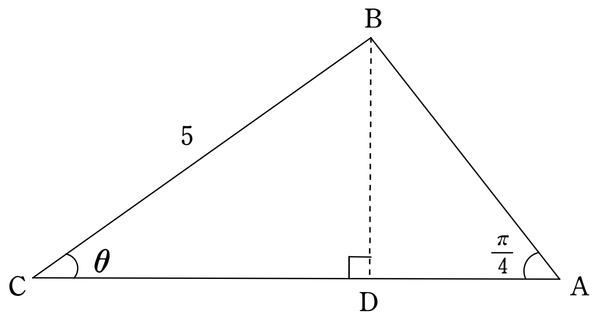
$S=\boxed{\text{エ}}\sin\left(2\theta-\boxed{\text{オ}}\right)+\boxed{\text{カ}}$ （ただし，$\boxed{\text{エ}}>0$，$0<\boxed{\text{オ}}<2\pi$）と表せる。

したがって，Sは $\theta=\boxed{\text{キ}}$ のとき，最大値$\boxed{\text{ク}}$をとる。

---

(1) △ABCにおいて，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\frac{\pi}{4}} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB}=5\sqrt{2}\sin\theta$$



図のようにBからCAに下ろした垂線の足をDとする。

また，$\mathrm{CA}=\mathrm{CD}+\mathrm{DA}$

$$=5\cos\theta+\mathrm{AB}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=5\cos\theta+5\sqrt{2}\sin\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=5\sin\theta+5\cos\theta$$

(2) $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CA}\sin\theta$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot(5\sin\theta+5\cos\theta)\sin\theta$$

$$=\frac{25}{2}\left(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$=\frac{25}{2}\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)$$

$$=\frac{25}{4}\left(\sin2\theta-\cos2\theta+1\right)$$

$$=\frac{25}{4}\left\{\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\right\}$$

$$=\frac{25\sqrt{2}}{4}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{25}{4}$$

ここで，$0<\theta<\frac{3}{4}\pi$ より $-\frac{\pi}{4}<2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{5}{4}\pi$ である。

よって

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\frac{3}{8}\pi$ のとき

$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$ となって S は最大値 $\frac{25\sqrt{2}+25}{4}$ をとる。

Assist $\boxed{2-3}$

xy 平面上に，曲線 C ： $x^2+y^2+2ax-6ay+11a^2+2a-3=0$ （ a は実数の定数）がある。

C は円を表すものとする。

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) C の中心の軌跡を求めよ。

(3) C のうちで面積が最大のものを C_0 とする。C_0 の中心の座標と半径を求めよ。

(4) 点 $(x,\ y)$ が C_0 上にあるとする。このとき， $x+y$ ， x^2+y^2 のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ。

---

(1) C ： $x^2+y^2+2ax-6ay+11a^2+2a-3=0 \iff (x+a)^2+(y-3a)^2=-a^2-2a+3$ …①

C が円を表すとき，①の右辺は正であるから

$-a^2-2a+3>0 \iff a^2+2a-3<0 \iff (a+3)(a-1)<0$ よって $-3<a<1$

(2) ①の中心の座標は $(-a,\ 3a)$

よって， $x=-a,\ y=3a$ より a を消去して $y=-3x$

(1)より $-3<a<1 \iff -1<-a<3$ であるから求める軌跡は

直線 $y=-3x$ （ $-1<x<3$ ）

(3) ①の円の面積が最大となるのは，

円の半径を r として $f(a)=r^2=-a^2-2a+3$ が最大となるときである。

$f(a)=-(a+1)^2+4$ であり，

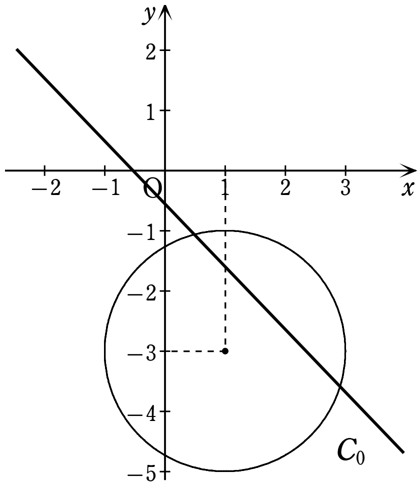
$-3<a<1$ において $f(a)$ は， $a=-1$ のとき最大値 4 をとる。

このとき， C_0 は $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ となり，中心 $(1,\ -3)$ ，半径 2 である。

（4）$x+y=k$ とおくと，$x+y-k=0$ であり，これは直線を表す。

点 $(x,\ y)$ が C_0 上にあるとき，この直線と円 C_0 が共有点をもつのは

「円 C_0 の中心 $(1,\ -3)$ と直線 $x+y-k=0$ との距離」 $\leqq$ 「円 C_0 の半径 2」



のときであり，$\dfrac{|1-3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq 2 \iff |-2-k|\leqq 2\sqrt{2}$

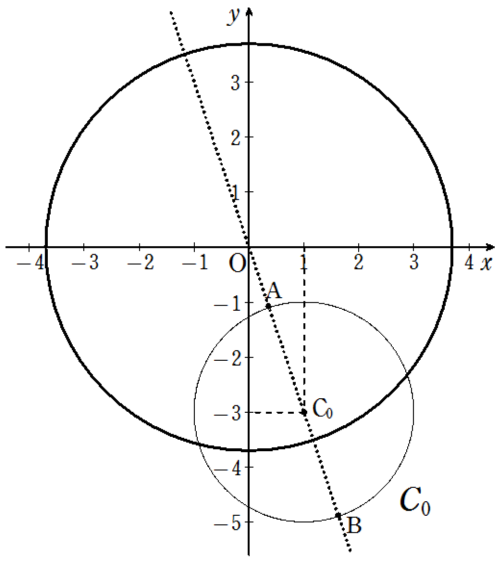
$\iff |k+2|\leqq 2\sqrt{2}$

$\iff -2\sqrt{2}\leqq k+2\leqq 2\sqrt{2}$

$\iff -2-2\sqrt{2}\leqq k\leqq -2+2\sqrt{2}$

したがって $-2-2\sqrt{2}\leqq x+y\leqq -2+2\sqrt{2}$

また，$x^2+y^2=k$ とおくと，これは原点中心，半径 $\sqrt{k}$ の円 …②を表す。



点 $(x,\ y)$ が C_0 上にあるとき，

　k が最小となるのは，②と円 C_0 とが外接するとき …③ であり，

　k が最大となるのは，②と円 C_0 とが内接するとき …④ である。

k は③から④までの範囲を動く。

直線 $y=-3x$ と C_0 の 2 つの交点を原点に近い方から A, B とし，

$\mathrm{C_0}(1,\ -3)$ とする。

$\mathrm{OA}\leqq\sqrt{k}\leqq\mathrm{OB}$ より $\mathrm{OA}^2\leqq k\leqq\mathrm{OB}^2$ である。

$\mathrm{OA}=\mathrm{OC_0}-2=\sqrt{10}-2$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC_0}+2=\sqrt{10}+2$ であるから

$\left(\sqrt{10}-2\right)^2\leqq k\leqq\left(\sqrt{10}+2\right)^2$ より $14-4\sqrt{10}\leqq k\leqq 14+4\sqrt{10}$

Assist $\boxed{3-1}$

三角形 ABC は， $AB=3,\ CA=3\sqrt{2},\ \angle BAC=135^\circ$ とする。

（1）三角形 ABC の面積を求めよ。

（2）$\angle BAC$ の三等分線が辺 BC と交わる点を， B に近い方から D, E とする。 AD, DE を求めよ。

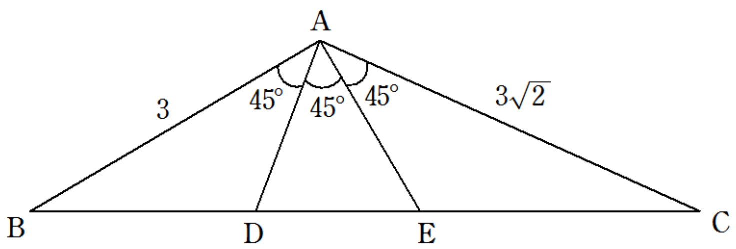
（1）$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot CA\sin\angle BAC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{9}{2}$$

（2）$AD=x$ とおく。



$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$

$$\frac{9}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot 3\sqrt{2}\sin 90^\circ$$

$$9\sqrt{2}=3x+6x$$

$x=\sqrt{2}$ 　したがって　$AD=\sqrt{2}$

$\triangle ADC$ において，三平方の定理より

$$CD^2=AD^2+AC^2=2+18=20$$

$CD>0$ より　$CD=\sqrt{20}$

AE は $\angle DAC$ の二等分線であるから　$DE:EC=AD:AC=\sqrt{2}:3\sqrt{2}=1:3$

したがって　$DE=\dfrac{1}{4}CD=\dfrac{\sqrt{20}}{4}$

Assist $\boxed{3-2}$

円に内接する四角形ABCDは， $AB=3$, $BC=6$, $BD=2\sqrt{11}$, $DA=5$ とする。

(1) $\cos\angle BAD$ を求めよ。

(2) CDを求めよ。

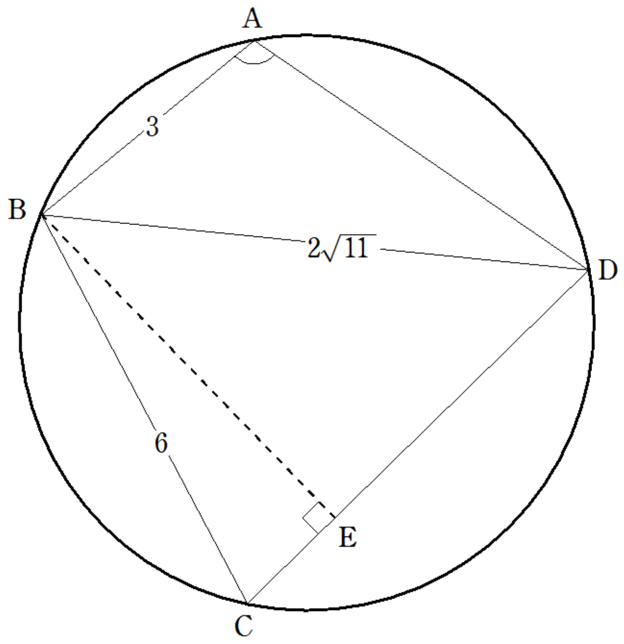
Bから辺CDに下ろした垂線の足をEとする。

(3) DEを求めよ。

---

(1) △ABDにおいて余弦定理より

$$\cos\angle BAD=\frac{3^2+5^2-\left(2\sqrt{11}\right)^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{-10}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{3}$$



(2) $CD=x$ とおく。

$$\cos\angle BCD=\cos\left(180^\circ-\angle BAD\right)$$
$$=-\cos\angle BAD$$
$$=\frac{1}{3}$$

△BCDにおいて余弦定理より

$$\left(2\sqrt{11}\right)^2=6^2+x^2-2\cdot6\cdot x\cos\angle BCD$$
$$44=36+x^2-12x\cdot\frac{1}{3}$$
$$x^2-4x-8=0$$

$x>0$ より　$x=2+2\sqrt{3}$

したがって　$CD=2+2\sqrt{3}$

（3）$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{BCD}$ である。

ここで，$\cos\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{3}$ より $\sin\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ であるから $\mathrm{BE}=6\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{BED}$ において三平方の定理より

$$\mathrm{BE}^2+\mathrm{DE}^2=\mathrm{BD}^2 \iff \mathrm{DE}^2=\mathrm{BD}^2-\mathrm{BE}^2$$

$$=\left(2\sqrt{11}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2$$

$$=12$$

$\mathrm{DE}>0$ より $\mathrm{DE}=2\sqrt{3}$

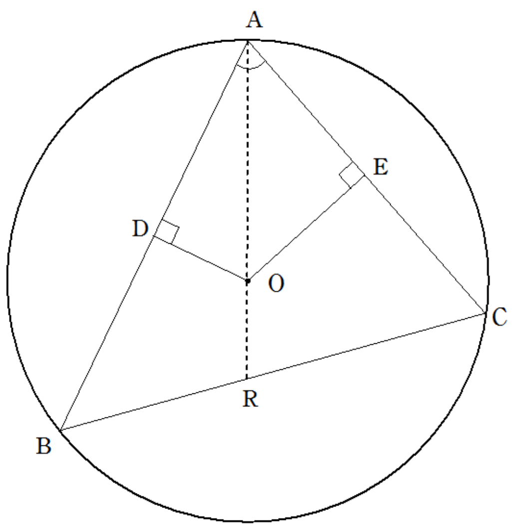
Assist $\boxed{3-3}$

$AB=4,\ AC=3,\ \angle BAC=60^\circ$ である三角形ABCの外接円の中心をOとする。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ と表すとき，$x,\ y$ を求めよ。

(3) 直線AOと直線BCの交点をRとするとき，$BR:RC$ の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot3\cos60^\circ=6$

(2) Oは△ABCの外接円の中心であるから

Dは AB の中点である。

よって

$$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

$$\iff \overrightarrow{DO}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC} \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{DO}$ と $\overrightarrow{AB}$ は垂直であるから

$$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right\}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$=16x-8+6y=0 \quad \text{よって}\ 8x+3y=4 \quad \cdots②$$

Eは AC の中点であるから，①と同様にして $\overrightarrow{EO}=x\overrightarrow{AB}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EO}$ と $\overrightarrow{AC}$ は垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{EO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left\{x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\left(y-\frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$=6x+9y-\frac{9}{2}=0$$ よって $4x+6y=3$ …③

②，③を連立方程式として解くと $x=\dfrac{5}{12}$，$y=\dfrac{2}{9}$

(3) 3点 A, O, R は一直線上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{AO}}$（$k$ は実数）と表せる。

(2)より $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\left(\frac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\frac{5k}{12}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2k}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ …④

R は直線 BC 上の点であるから，

④の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の係数について

$$\frac{5k}{12}+\frac{2k}{9}=1 \Leftrightarrow 15k+8k=36$$ より $k=\dfrac{36}{23}$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{15}{23}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{8}{23}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{15\overrightarrow{\mathrm{AB}}+8\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{8+15}$$

であるから

$\mathrm{BR}:\mathrm{RC}=8:15$

Assist $\boxed{3-4}$

xyz 空間に，３点 $\mathrm{P}(3, 10, 3)$, $\mathrm{Q}(3, 11, 5)$, $\mathrm{R}(2, 12, 6)$ がある。

(1) 三角形 PQR の面積を求めよ。

(2) ３点 P, Q, R を含む平面と z 軸の交点の座標を求めよ。

(3) ２点 Q, R を通る直線上に，２点 A, B を三角形 PAB が正三角形になるようにとるとき，

三角形 PAB の面積を求めよ。

---

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(3, 11, 5)-(3, 10, 3)=(0, 1, 2)$,

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(2, 12, 6)-(3, 10, 3)=(-1, 2, 3)$ である。

△PQR の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 14-8^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(2) ３点 P, Q, R を含む平面上の点を D とすると

$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}$（$s$, t は実数）と表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

$$=(3, 10, 3)+s(0, 1, 2)+t(-1, 2, 3)$$

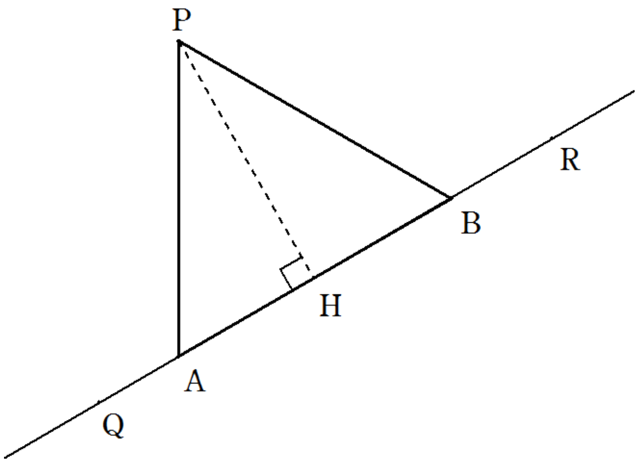
$$=(3-t, 10+s+2t, 3+2s+3t)$$

であり，D が z 軸上の点であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の x 成分，y 成分は 0 であるから

$3-t=0$ かつ $10+s+2t=0$　これを解くと $s=-16$, $t=3$

よって，求める座標は $(0, 0, -20)$

(3) P から直線 QR に下ろした垂線の足を H とする。



$\triangle$PAB が正三角形になるとき,

PH は正三角形の高さになる。

正三角形の 1 辺の長さは $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{PH}$ であるから

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{PH}\right)^2\sin 60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{PH}^2$$

となる。

次に, PH を求める。

直線 QR 上の点を $\mathrm{E}(x,\ y,\ z)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{QE}}=k\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=(1-k)(3,\ 11,\ 5)+k(2,\ 12,\ 6)-(3,\ 10,\ 3)$$

$$=(-k,\ k+1,\ k+2)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ が垂直になるとき E は H と一致し, $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ となるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(-k,\ k+1,\ k+2)\cdot(-1,\ 1,\ 1)$$

$$=k+k+1+k+2$$

$$=3k+3=0 \quad \text{よって} \quad k=-1$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(1,\ 0,\ 1)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{PH}}|=\sqrt{2}$

よって, $\triangle$PAB の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{2}^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Assist $\boxed{4-1}$

実数 $x,\ y$ は $2x+3y=6$ を満たしているとする。このとき，4^x+8^y の最小値を求めよ。

$2x+3y=6 \iff 3y=6-2x$ であるから

$4^x+8^y=2^{2x}+2^{3y}=2^{2x}+2^{6-2x}=2^{2x}+\dfrac{2^6}{2^{2x}}$

ここで，$2^{2x}>0,\ \dfrac{2^6}{2^{2x}}>0$ より，相加・相乗平均の不等式より

$$2^{2x}+\frac{2^6}{2^{2x}} \leqq 2\sqrt{2^{2x}\cdot\frac{2^6}{2^{2x}}}=2\sqrt{2^6}=16$$

等号成立は $2^{2x}=\dfrac{2^6}{2^{2x}} \iff \left(2^{2x}\right)^2=2^6 \iff 4x=6$ より $x=\dfrac{3}{2}$ のときであり，

このとき $y=1$ となる。

したがって，4^x+8^y の最小値は $16 \quad \left(x=\dfrac{3}{2},\ y=1\right)$

Assist $\boxed{4-2}$

数列$\{a_n\}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）の一般項は，$a_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$ とする。

（1）a_n を n の式で表せ。

（2）$\sum_{k=2}^{60}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。

（1）
$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)k\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\right\}\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(0\cdot1\cdot2-(-1)\cdot0\cdot1\right)+\left(1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2\right)+\cdots+\left\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\right\}\right\}\\&=\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

〔別解〕

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-1\right)\\&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2(n-1)}{3}\\&=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{60}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=2}^{60}\frac{3}{(k-1)k(k+1)}$

$$=\frac{3}{2}\sum_{k=2}^{60}\left\{\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{59\cdot 60}-\frac{1}{60\cdot 61}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{60\cdot 61}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{30\cdot 61-1}{60\cdot 61}\right)$$

$$=\frac{1829}{2440}$$

Assist $\boxed{4-3}$

xy 平面において，x 座標，y 座標がともに整数である点 $(x,\ y)$ を格子点という。

$x,\ y$ が条件「$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ かつ $\log_2 y \leqq \log_4 x^2 + x$ 」…（＊）

を満たしているとする。

(1) $x=1$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数を求めよ。

(2) $x=2$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数を求めよ。

(3) $x \leqq 3$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数を求めよ。

(4) n は自然数とする。$1 \leqq x \leqq n$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数を n を用いて表せ。

---

(1) $x=1$ のとき

（＊）⇔「$y \geqq 1$ かつ $\log_2 y \leqq 1$ 」

$\log_2 y \leqq 1 \iff \log_2 y \leqq \log_2 2$ であるから，$y=1,\ 2$

よって，$x=1$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は２個である。

(2) $x=2$ のとき

（＊）⇔「$y \geqq 1$ かつ $\log_2 y \leqq \log_4 4 + 2$ 」

$\log_2 y \leqq \log_4 4 + 2 \iff \log_2 y \leqq 3 \iff \log_2 y \leqq \log_2 8$ であるから，$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$

よって，$x=2$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は８個である。

(3) $x=3$ のとき

（＊）⇔ 「$y \geqq 1$ かつ $\log_2 y \leqq \log_4 9 + 3$ 」

$\log_2 y \leqq \log_4 9+3$ ⇔ $\log_2 y \leqq \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4} + \log_2 8$ ⇔ $\log_2 y \leqq \dfrac{1}{2}\log_2 9 + \log_2 8$

⇔ $\log_2 y \leqq \log_2 3 + \log_2 8$ ⇔ $\log_2 y \leqq \log_2 24$ であるから， $y=1,\ 2,\ \cdots,\ 24$

よって， $x=3$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は２４個である。

$x \leqq 3$ ⇔ $x=1$ または $x=2$ または $x=3$ であるから

$x \leqq 3$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は $2+8+24=34$ 個

(4) $x=k$ のとき

（＊）⇔ 「$y \geqq 1$ かつ $\log_2 y \leqq \log_4 k^2 + k$ 」

$\log_2 y \leqq \log_4 k^2 + k$ ⇔ $\log_2 y \leqq \dfrac{\log_2 k^2}{\log_2 4} + \log_2 2^k$ ⇔ $\log_2 y \leqq \dfrac{1}{2}\log_2 k^2 + \log_2 2^k$

⇔ $\log_2 y \leqq \log_2 k + \log_2 2^k$ ⇔ $\log_2 y \leqq \log_2\left(k \cdot 2^k\right)$ であるから， $y=1,\ 2,\ \cdots,\ k \cdot 2^k$

よって， $x=k$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は $k \cdot 2^k$ 個である。

したがて，$1 \leqq x \leqq n$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$ 個である。

次に， $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$ を n の式で表す。

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots\cdots + n \cdot 2^n$ …① とおくと

$2S_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \cdots\cdots + n \cdot 2^{n+1}$ …② であり，

②－①より $S_n = -(2+2^2+\cdots+2^n) + n \cdot 2^{n+1} = -\dfrac{2(1-2^n)}{1-2} + n \cdot 2^{n+1}$

$$= 2 - 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2$$

したがって

$1 \leqq x \leqq n$ かつ条件（＊）を満たす格子点の個数は $(n-1)2^{n+1}+2$ 個

Assist $\boxed{4-4}$

nは自然数とする。数直線上の点$\mathrm{A}_n(a_n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(b_n,\ 0)$が次のように定められている。

点A_{n+1}は線分$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$を$4:1$に内分する点とし，点B_{n+1}は線分$\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$を$4:1$に内分する点とする。

ただし，$a_1=1,\ b_1=6$とする。

(1) a_{n+1}，b_{n+1}をa_n，b_nを用いて表せ。

(2) $c_n=a_n-b_n$とおくとき，数列$\{c_n\}$の一般項c_nを求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めよ。

---

(1) A_{n+1}は線分$\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$を$4:1$に内分する点であるから

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot a_n+4b_n}{4+1}=\frac{a_n+4b_n}{5}$$

点B_{n+1}は線分$\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$を$4:1$に内分する点であるから

$$b_{n+1}=\frac{1\cdot b_n+4a_{n+1}}{4+1}=\frac{4a_{n+1}+b_n}{5}=\frac{4\cdot\dfrac{a_n+4b_n}{5}+b_n}{5}=\frac{4a_n+21b_n}{25}$$

(2) $c_n=a_n-b_n$ より $c_{n+1}=a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{a_n+4b_n}{5}-\dfrac{4a_n+21b_n}{25}=\dfrac{a_n-b_n}{25}=\dfrac{c_n}{25}$

$c_1=a_1-b_1=1-6=-5$ であるから，$\{c_n\}$は初項-5，公比$\dfrac{1}{25}$の等比数列である。

よって，$c_n=-5\left(\dfrac{1}{25}\right)^{n-1}$

(3) (2)より $a_n - b_n = -5\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} \Leftrightarrow b_n = a_n + 5\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$ であるから

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 4b_n}{5} = \frac{a_n + 4\left\{a_n + 5\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}\right\}}{5} = \frac{5a_n + 20\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}}{5} = a_n + 4\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$$

したがって，a_n の階差数列が $4\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$ である。

よって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4\left(\frac{1}{25}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{4\left\{1 - \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{25}}$$

$$= 1 + \frac{25}{6}\left\{1 - \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{31}{6} - \frac{25}{6}\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1}$$ これは $n=1$ のときも成り立っている。

よって，$a_n = \frac{31}{6} - \frac{25}{6}\left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

Assist $\boxed{5-1}$

２つの曲線 $y=-x^3+a$, $y=-x^2+bx+c$ は，点 $(-1,\ 2)$ において接線 ℓ を共有している。このとき，$a,\ b,\ c$ の値および接線 ℓ の方程式を求めよ。

$f(x)=-x^3+a$ ， $g(x)=-x^2+bx+c$ とおくと $f'(x)=-3x^2$ ， $g'(x)=-2x+b$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ が，点 $(-1,\ 2)$ において接線 ℓ を共有していることから

$f(-1)=g(-1)=2$ かつ $f'(-2)=g'(-2)$

が成り立つ。

よって $1+a=-1-b+c=2$ かつ $-12=4+b$

これを解くと $a=1,\ b=-16,\ c=-13$

このとき，接線 ℓ の方程式は，

$(-1,\ 2)$ を通り，傾きが $f'(-2)=g'(-2)=-12$ の直線であることから

$y-2=-12(x+1) \Leftrightarrow y=-12x-10$

Assist $\boxed{5-2}$

等式 $\int_x^a f(t)dt = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ を満たす関数 $f(x)$，および定数 a の値を求めよ。

また，このとき，$\int_0^3 |f(x)|dx$ を求めよ。

$\int_x^a f(t)dt = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 \Leftrightarrow \int_a^x f(t)dt = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$ …①

①の両辺を x で微分して　$f(x) = -6x^2 + 18x - 12$

また，与えられた等式において $x = a$ として

$$2a^3 - 9a^2 + 12a - 5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(2a^2 - 7a + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(2a-5) = 0$$

$$a = 1,\ \frac{5}{2}$$

よって，$f(x) = -6x^2 + 18x - 12$，$a = 1,\ \dfrac{5}{2}$

また，$f(x) = -6x^2 + 18x - 12 = -6(x^2 - 3x + 2) = -6(x-1)(x-2)$　であるから

$x \leqq 1,\ 2 \leqq x$ で　$f(x) \leqq 0$，$1 \leqq x \leqq 2$ で　$f(x) \geqq 0$　である。

よって

$$\int_0^3 |f(x)|dx = \int_0^3 |-6x^2 + 18x - 12|dx$$

$$= \int_0^1 \{-(-6x^2 + 18x - 12)\}dx + \int_1^2 (-6x^2 + 18x - 12)dx + \int_2^3 \{-(-6x^2 + 18x - 12)\}dx$$

$$= \int_0^1 (6x^2 - 18x + 12)dx - \int_1^2 (6x^2 - 18x + 12)dx + \int_2^3 (6x^2 - 18x + 12)dx \quad \cdots ②$$

ここで，$g(x) = 6x^2 - 18x + 12$ とおき，$g(x)$ の不定積分の１つを $G(x)$ とすると

$G(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$　であるから

$$② = \{G(1) - G(0)\} - \{G(2) - G(1)\} + \{G(3) - G(2)\}$$

$$= -G(0) + 2G(1) - 2G(2) + G(3)$$

$$= -0 + 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 + 9$$

$$= 11$$

Assist $\boxed{5-3}$

xy 平面上に，放物線 $C : y=\dfrac{1}{6}x^2-3$ と，C 上にない点 $\mathrm{A}(3,\ a)$ がある。

A から C に３本の異なる法線が引けるような a のとり得る値の範囲を求めよ。

なお，点 P における C の法線とは，C 上の点 P を通り，P における C の接線に垂直な直線である。

$f(x)=\dfrac{1}{6}x^2-3$ より $f'(x)=\dfrac{1}{3}x$ であり，

C 上の x 座標が t である点における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(t)}=-\dfrac{3}{t}$ である。

よって，C 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{6}t^2-3\right)=-\frac{3}{t}(x-t) \iff y=-\frac{3}{t}x+\frac{1}{6}t^2 \quad \cdots①$$

①が $\mathrm{A}(3,\ a)$ を通るとき

$$a=-\frac{9}{t}+\frac{1}{6}t^2 \text{ より } 6at=-54+t^3 \iff t^3-6at-54=0 \quad \cdots②$$

A から C に３本の異なる法線が引けるのは，

t の３次方程式②が異なる３つの実数解をもつときである。

それは，３次関数 $y=t^3-6at-54$ のグラフが t 軸と異なる３点で交わるときであり，

このとき極小値と極大値の符号は異なるので，（極小値）・（極大値）<0 となる。

$g(t)=t^3-6at-54$ とおくと $g'(t)=3t^2-6a$

$g'(t)=0 \iff 3t^2-6a=0 \iff t^2=2a$ を満たす t は

$a>0$ のもとで $t=\pm\sqrt{2a}$ である。

したがって，$g\left(\sqrt{2a}\right)\cdot g\left(-\sqrt{2a}\right)<0 \iff \left(2a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}-54\right)\left(-2a\sqrt{2a}+6a\sqrt{2a}-54\right)<0$

$$\iff \left(-4a\sqrt{2a}-54\right)\left(4a\sqrt{2a}-54\right)<0$$

$$\iff \left(2a\sqrt{2a}+27\right)\left(2a\sqrt{2a}-27\right)>0$$

$a>0$ より $2a\sqrt{2a}+27>0$ であるから $\left(2a\sqrt{2a}-27\right)>0$ より

$$a\sqrt{2a} > \frac{27}{2} \iff \sqrt{2a^3} > \frac{27}{2} \iff 2a^3 > \frac{3^6}{2^2} \iff a^3 > \frac{3^6}{2^3} \iff a > \frac{9}{2}$$

よって，求める a のとり得る値の範囲は $a > \dfrac{9}{2}$

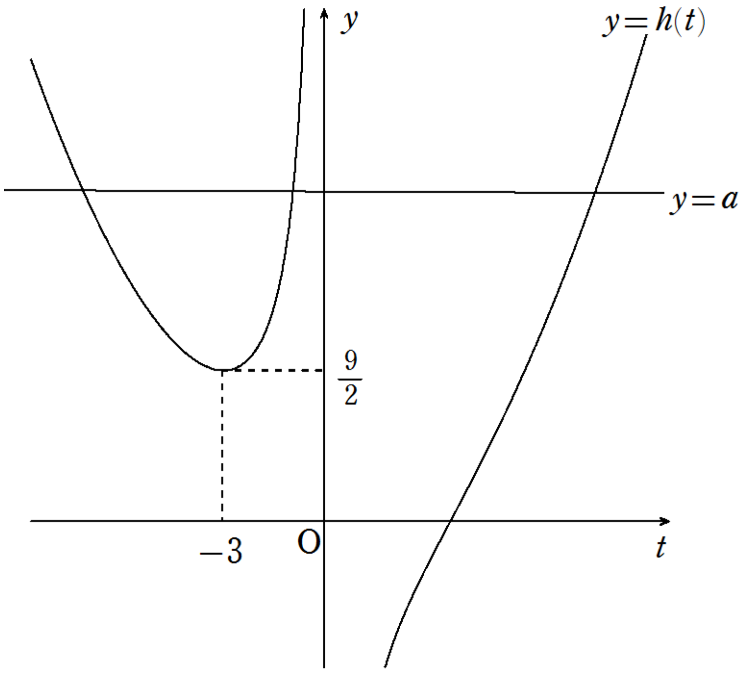
〔別解〕（$a = -\dfrac{9}{t} + \dfrac{1}{6}t^2$ まで求めてから）

$h(t) = -\dfrac{9}{t} + \dfrac{1}{6}t^2$ とおくと $h'(x) = \dfrac{9}{t^2} + \dfrac{1}{3}t = \dfrac{27+t^3}{3t^2} = \dfrac{(t+3)(t^2-3t+9)}{3t^2}$

$h(t)$ の増減は下表に従う。

t	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	／	$+$
$h(t)$	↘	$\dfrac{9}{2}$	↗	／	↗

$\lim\limits_{t\to+0} h(t) = -\infty$，$\lim\limits_{t\to-0} h(t) = \infty$，$\lim\limits_{t\to\pm\infty} h(t) = \infty$ であり，$y = h(t)$ のグラフは次図のようになる。



A から C に３本の異なる法線が引けるような a の値の範囲を求めるには

$y = h(t)$ と $y = a$ が異なる３つの共有点をもつような a の値の範囲を求めればよいので $a > \dfrac{9}{2}$

Assist $\boxed{5-4}$

p は実数の定数で，$0<p<4$ とする。

xy 平面上に頂点が $\left(p,\,-p^2\right)$ で，点 $(4,\,0)$ を通る放物線 C がある。

(1) C の方程式を p を用いて表せ。

(2) C と x 軸で囲まれてできる図形の面積を S とする。S を p を用いて表せ。

(3) S の最大値を求めよ。

---

(1) C は $y=a(x-p)^2-p^2$ とおける。

$(4,\,0)$ を通るので $a(4-p)^2-p^2=0$ より $a=\dfrac{p^2}{(4-p)^2}$

したがって，C の方程式は $y=\dfrac{p^2}{(4-p)^2}(x-p)^2-p^2$

(2) C と x 軸との交点の x 座標を $\alpha,\,\beta$（$\alpha<\beta$）とする。

$$S=\int_\alpha^\beta\left[-\left\{\frac{p^2}{(4-p)^2}(x-p)^2-p^2\right\}\right]dx=-\frac{p^2}{(4-p)^2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\frac{p^2}{(4-p)^2}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{p^2}{6(4-p)^2}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，C と x 軸との交点の x 座標を求めると

$$\frac{p^2}{(4-p)^2}(x-p)^2-p^2=0 \iff (x-p)^2=(4-p)^2 \iff x-p=\pm(4-p) \quad \text{より} \quad x=4,\ 2p-4$$

$0<p<4$ より $2p-4<4$ であるので $\alpha=2p-4,\ \beta=4$ である。

よって，$S=\dfrac{p^2}{6(4-p)^2}\{4-(2p-4)\}^3$

$$=\frac{p^2}{6(4-p)^2}\{2(4-p)\}^3$$

$$=\frac{4}{3}p^2(4-p)$$

（3） $S=\dfrac{4}{3}\left(-p^3+4p^2\right)$

$f(p)=-p^3+4p^2$ とおく。

$f'(p)=-3p^2+8p=-p(3p-8)$ より $f(p)$ の増減は下表に従う。

p	0	$\cdots$	$\dfrac{8}{3}$	$\cdots$	4
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		$\nearrow$	$\dfrac{256}{27}$	$\searrow$	

よって， $f(p)$ は $p=\dfrac{8}{3}$ のときに最大値 $\dfrac{256}{27}$ をとる。

このとき S も最大となり，求める最大値は $\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{256}{27}=\dfrac{1024}{81}$