Mathematics Reflection

解答・解説

$\boxed{1-1}$

次の問いに答えよ。

(1) $ab+2a-2b-8=0$ を満たす整数 $a,\ b$ の組は全部で何組あるか求めよ。

(2) $(m+n)(3m-n)-4m+4n-8=0$ を満たす整数 $m,\ n$ の組をすべて求めよ。

---

(1) $ab+2a-2b-8=0 \iff (a-2)(b+2)=4$

と変形でき，$a,\ b$ がそれぞれ整数のとき，$a-2,\ b+2$ もそれぞれ整数となるから

$(a-2,\ b+2)=(1,\ 4),\ (-1,\ -4),\ (4,\ 1),\ (-4,\ -1),\ (2,\ 2),\ (-2,\ -2)$

の場合があり，

このとき，$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (1,\ -6),\ (6,\ -1),\ (-2,\ -3),\ (4,\ 0),\ (0,\ -4)$ となるので，６組ある。

(2) $m+n=x,\ 3m-n=y$ とおく。

$m,\ n$ を $x,\ y$ を用いて表すと $4m=x+y,\ 4n=3x-y$ となる。

このとき，$(m+n)(3m-n)-4m+4n-8=0$

$\iff xy-(x+y)+(3x-y)-8=0$

$\iff xy+2x-2y-8=0$

$m,\ n$ がそれぞれ整数のとき，$x,\ y$ も整数であるから

(1)の結果より $(x,\ y)=(3,\ 2),\ (1,\ -6),\ (6,\ -1),\ (-2,\ -3),\ (4,\ 0),\ (0,\ -4)$ となる。

したがって，$(m+n,\ 3m-n)=(3,\ 2),\ (1,\ -6),\ (6,\ -1),\ (-2,\ -3),\ (4,\ 0),\ (0,\ -4)$ であり，

$m,\ n$ の組を求めると，$(m,\ n)=\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{7}{4}\right),\left(-\dfrac{5}{4},\ \dfrac{9}{4}\right),\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{19}{4}\right),\left(-\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right),\ (1,\ 3),\ (-1,\ 1)$

$m,\ n$ は整数であるから，求める整数 $m,\ n$ の組は $(1,\ 3),\ (-1,\ 1)$

$\boxed{1-2}$

k は実数の定数とし，x の関数 $f(x)=-(x^2+2x)^2-2k(x^2+2x)+2k^2-4k-4$ がある。

(1) $k=-1$ のとき，$f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値が 0 となるような k の値を求めよ。

---

(1) $k=-1$ のとき $f(x)=-(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)+2$ である。

$t=x^2+2x$ とおくと，$t=(x+1)^2-1$ より $t\geqq-1$ …①

$f(x)=g(t)=-t^2+2t+2=-(t-1)^2+3$ …②

①より $t=1$ すなわち $x^2+2x=1$ より $x^2+2x-1=0$ から

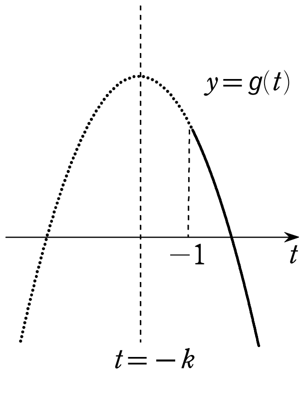
②は $x=-1\pm\sqrt{2}$ のとき，最大値 3 をとる。

(2) (1)と同様に，$t=x^2+2x$ とおく。

$f(x)=g(t)=-t^2-2kt+2k^2-4k-4=-(t+k)^2+3k^2-4k-4$

$y=g(t)$ の軸は $t=-k$ であり，これが①の範囲に含まれるか含まれないかで場合分けをする。

（ⅰ）$-k<-1$ すなわち $k>1$ のとき



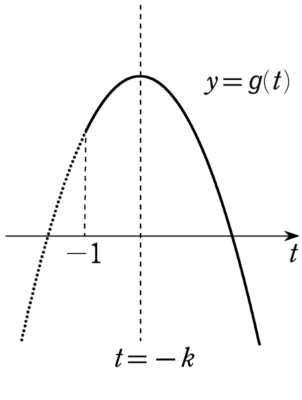
$g(t)$ が最大になるのは $t=-1$ のときであるから

$g(-1)=-1+2k+2k^2-4k-4=2k^2-2k-5$

これが 0 になるので $2k^2-2k-5=0$ より

$k=\dfrac{1\pm\sqrt{11}}{2}$　$k>1$ より $k=\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$

（ⅱ）$-k\geqq-1$ すなわち $k\leqq1$ のとき



$g(t)$ が最大になるのは $t=-k$ のときであるから

$g(-k)=3k^2-4k-4$

これが 0 になるので $3k^2-4k-4=0$ より

$(3k+2)(k-2)=0$　$k\leqq1$ より $k=-\dfrac{2}{3}$

以上より，求める k の値は $k=-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}$

$\boxed{1-3}$

次の問いに答えよ。

（A）６個の白球を３人に配る。

(1) 白球を受け取らない人がいてもよいような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

(2) 全員が少なくとも１個の白球を受け取るような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

（B）６個の相異なる色の球を３人に配る。

(1) 球を受け取らない人がいてもよいような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

(2) 全員が少なくとも１個の球を受け取るような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

（A）

(1) ６個の○と２本の｜を一列に並べた順列を考える。

このとき，｜で区切られた３つの部分のそれぞれに含まれる○の個数について

左側を１人目，まん中を２人目，右側を３人目の受け取る白球の個数を考えると

この順列の総数と題意の配り方とは１対１に対応する。

したがって，求める配り方の総数は $_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=28$ 通り。

(2) (1)において，３人に先に１つずつ○を分けて渡しておく。

このとき，残っている３個の○と２本の｜を一列に並べた順列を考えれば，

この順列の総数と題意の配り方とは１対１に対応する。

したがって，求める配り方の総数は $_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$ 通り。

（B）

(1) ６個の球それぞれが３人のいずれかに渡ると考えて，$3^6 = 729$ 通り。

この中には，球を受け取らない人がいる場合も含まれている。

(2) ６個の球それぞれが２人だけ（１人は含まない）に渡る場合の数を考える。

２人の選び方は ${}_3\mathrm{C}_2$ 通りある。

６個の球それぞれが２人のいずれかに渡るのは 2^6 通りあるが，

この中には１人だけに渡る（２通り）場合も含まれているので，

それを引くと $2^6 - 2$ 通り。したがって，２人だけに渡るのは ${}_3\mathrm{C}_2 \times (2^6 - 2)$ 通り。

また，１人だけに渡るのは３通りある。

したがって，題意の配り方の総数は，

すべての配り方から，２人だけ，１人だけへの配り方を引いて

$$3^6 - {}_3\mathrm{C}_2 \times (2^6 - 2) - 3 = 729 - 186 - 3 = 540$$ 通り。

$\boxed{1-4}$

箱の中に，１から４までの数字が１つずつ書かれたカードがそれぞれ２枚，合計８枚ある。

ここから３枚取り出すとき，その数字の最大値を X ，最小値を Y とする。

(1) $X=4$ となる確率を求めよ。

(2) $X-Y=3$ となる確率を求めよ。

---

(1) $X=4$ となるには，４が少なくとも１枚出ればよい。

すべての取り出し方は ${}_8\mathrm{C}_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ 通りあり，これらの出方は同様に確からしい。

「４が１枚出る」のは ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2=30$ 通り。

「４が２枚出る」のは ${}_2\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1=6$ 通り。

これらは排反であるから，求める確率は $\dfrac{30+6}{56}=\dfrac{36}{56}=\dfrac{9}{14}$

〔別解〕

４が少なくとも１枚出ることの余事象は「１枚も４が出ない」であり，

その場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 通りある。

よって，求める確率は $1-\dfrac{20}{56}=\dfrac{36}{56}=\dfrac{9}{14}$

(2) $X-Y=3$ となるには，４と１がともに少なくとも１枚出ればよい。

「４が１枚，１が１枚，２または３が１枚出る」のは ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$ 通り。

「４が２枚，１が１枚出る」のは ${}_2\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=2$ 通り。

「４が１枚，１が２枚出る」のは ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2=2$ 通り。

これらは排反であるから，求める確率は $\dfrac{16+2+2}{56}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$

2－1

三角形ABCにおいて，$\angle A=30^\circ$，$AB=4$, $AC=3$ とする。

辺BC上（ただし，B, Cは除く）の点をPとし，Pと直線ABの距離を x，Pと直線ACの距離を y とする。

(1) 三角形ABCの面積を求めよ。

(2) $BP:PC=2:1$ であるとき，x, y の値を求めよ。

(3) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$ の最小値を求めよ。また，そのときの x, y の値を求めよ。

---

(1) 求める面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \sin 30^\circ=3$$

(2) $BP:PC=2:1$であるから，$\triangle ABP:\triangle ACP=2:1$

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle ACP$であり，$\triangle ABC=3$であるから，$\triangle ABP=2$，$\triangle ACP=1$

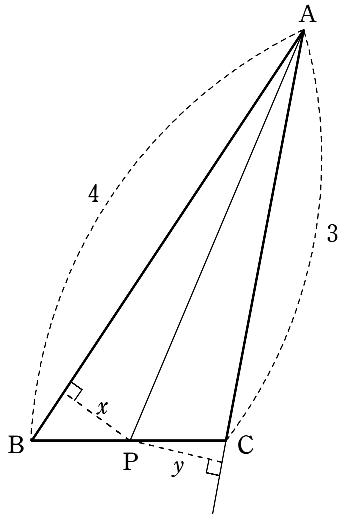
ここで，xは$\triangle ABP$において，ABを底辺と見たときの高さ，

yは$\triangle ACP$において，ACを底辺と見たときの高さになっている。

よって，$4\times x\times\dfrac{1}{2}=2$, $3\times y\times\dfrac{1}{2}=1$ より $x=1$, $y=\dfrac{2}{3}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABP}+\triangle\mathrm{ACP}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}=3$ であるから

$3=4\times x\times\frac{1}{2}+3\times y\times\frac{1}{2}$ より $4x+3y=6$ …①



P が辺 BC 上（ただし，B，C は除く）を動くことから $0<x<\frac{3}{2}$ …②

①より $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{4x+3y}{xy}=\frac{6}{xy}$

さらに，①より $y=-\frac{4}{3}x+2$ であるから

$\frac{6}{xy}=\frac{6}{x\left(-\frac{4}{3}x+2\right)}=\frac{6}{-\frac{4}{3}x^2+2x}=\frac{6}{-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}$ …③

②の範囲において③が最小となるのは，③の分母が最大になるときであり，

$x=\frac{3}{4}$ のときである。このとき，①より $y=1$ であり，分母は最大値 $\frac{3}{4}$ をとる。

よって求める最小値は $\frac{6}{\frac{3}{4}}=8$

$\boxed{2-2}$

三角形ABCは，$\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{BC}=19$, $\mathrm{CA}=16$ を満たしている。

(1) ∠Aの大きさ，および三角形ABCの外接円の半径を求めよ。

∠BACの二等分線が，三角形ABCの外接円と交わる点をDとする。

(2) BD，AD を求めよ。

三角形BCDの内心をIとする。Iから線分AC, ADに下ろした垂線の足をそれぞれE, Fとする。

(3) 三角形AEFの面積を求めよ。

---

(1) 余弦定理より

$$\cos \mathrm{A}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{5^2+16^2-19^2}{2\cdot5\cdot16}=\frac{25+256-361}{2\cdot5\cdot16}=\frac{-80}{2\cdot5\cdot16}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\mathrm{A}<180^\circ$ であるから $\mathrm{A}=120^\circ$

△ABCの外接円の半径を R とすると

正弦定理より $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\mathrm{A}}=2R$

よって，$R=\dfrac{19}{2\sin120^\circ}=\dfrac{19}{\sqrt{3}}=\dfrac{19\sqrt{3}}{3}$

(2) ADは∠BACの２等分線であるから $\angle\mathrm{BAD}=60^\circ$ である。

よって，△ABDにおいて正弦定理より $\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin\angle\mathrm{BAD}}=2R$

$\mathrm{BD}=2\cdot\dfrac{19}{\sqrt{3}}\cdot\sin60^\circ=19$

さらに，△ABDにおいて余弦定理より

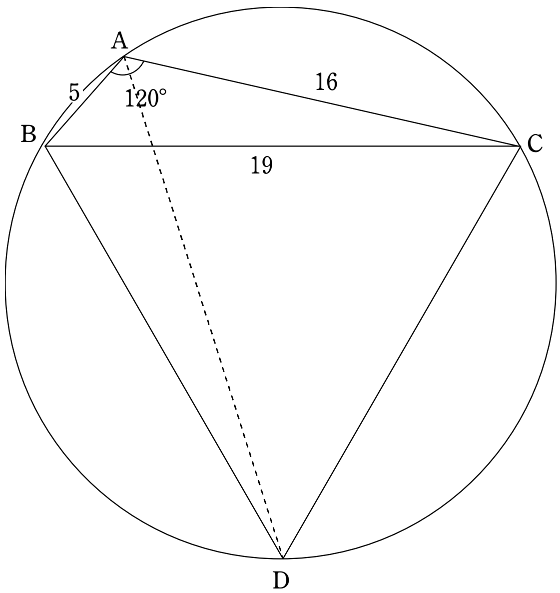
$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos60^\circ$

$\mathrm{AD}=x$ とおくと $19^2=5^2+x^2-2\cdot5\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}$

$$x^2-5x-336=0$$

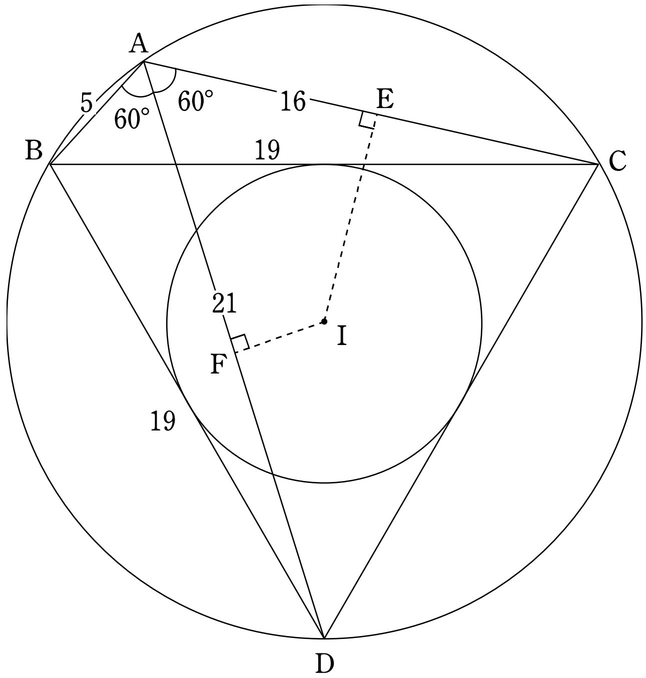
$$(x-21)(x+16)=0$$

$x>0$ より $x=21$ したがって $\mathrm{AD}=21$



(3) $\angle \mathrm{CBD} = \angle \mathrm{CAD} = 60^\circ$, $\mathrm{BC} = \mathrm{BD} = 19$ であるから

$\triangle \mathrm{BCD}$ は正三角形である。



正三角形において，内心と外心は一致するので，I は $\triangle \mathrm{BCD}$ の外心でもある。

$\triangle \mathrm{BCD}$ と $\triangle \mathrm{ACD}$ は同じ外接円を共有しているので，I は $\triangle \mathrm{ACD}$ の外心でもある。

I から線分 AC, AD に下ろした垂線の足がそれぞれ E, F であるから

E, F はそれぞれ辺 AD, AC の中点である。

よって，$\mathrm{AF} = \dfrac{21}{2}$, $\mathrm{AE} = 8$

したがって，$\triangle \mathrm{AEF}$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AE} \cdot \mathrm{AF} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{21}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21\sqrt{3}$$

2－3

長方形ABCDにおいて，$AB=1$, $BC=1+\sqrt{3}$ とする。辺CD, DA上に点P, Qを$\angle PBQ=\dfrac{\pi}{3}$となるようにおき，$\angle CBP=\theta$とし，三角形BPQの面積を$S$とする。

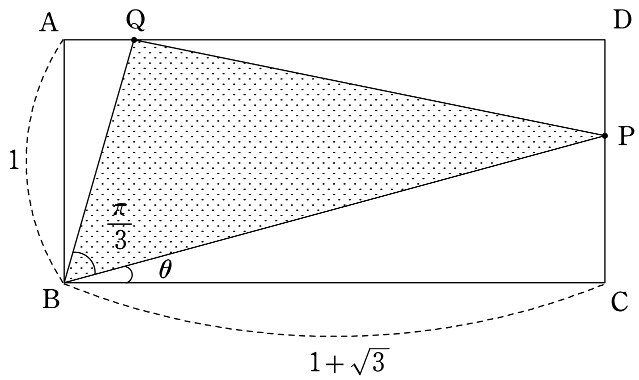
(1) Sをθで表せ。

(2) Sの最小値を求めよ。また，そのときのθの値を求めよ。

---

(1) $\angle ABQ=\dfrac{\pi}{2}-\angle PBQ-\angle CBP=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}-\theta=\dfrac{\pi}{6}-\theta$ である。

$BQ\cos\angle ABQ=AB$ より $BQ=\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)}$



$BP\cos\angle CBP=BC$ より $BP=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\cos\theta}$

したがって

$$S=\frac{1}{2}BQ\cdot BP\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{\cos\theta}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\cos\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)}=\frac{3+\sqrt{3}}{4\cos\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)}$$

(2) $f(\theta)=\cos\theta\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)$ とおく。

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{1}{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\quad\cdots①$$

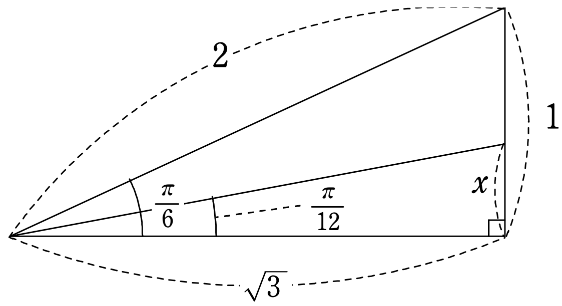
Sが最小になるのは，$f(\theta)$が最大になるときである。

次に，①において，$\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ となることがあるか調べる。

θのとり得る範囲は,（θについて具体的には求められないが）

Pが辺CD上を動くことから $0\leqq\tan\theta\leqq\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$ を満たす範囲である。

ここで，右図において x を求めると



$$x=1\times\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

よって $\tan\frac{\pi}{12}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}<\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$

であるから， $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のときに $\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$ となり，

①は最大値 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

このとき，S の最小値は

$$\frac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}\qquad\left(\theta=\frac{\pi}{12}\right)$$

〔別解〕（$f(\theta)$ の最大値の別の求め方）

$$f(\theta)=\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\quad=\cos\theta\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right)=\cos\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

としてから解答と同様に $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ のとき，$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ となれることを確認する。

$\boxed{2-4}$

次の問いに答えよ。

（1）２つの直線　$y=2x,\ y=\dfrac{1}{3}x$　のなす角をθ　$\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$　とするとき，θを求めよ。

（2）２つの直線$y=\sqrt{2}x,\ y=mx$　のなす角が$\dfrac{\pi}{8}$　$\left(0<m<\sqrt{2}\right)$　であるとき，mを求めよ。

（1）$y=2x,\ y=\dfrac{1}{3}x$とx軸正方向とのなす角をそれぞれ$\theta_1,\ \theta_2$とすると　$\tan\theta_1=2,\ \tan\theta_2=\dfrac{1}{3}$

$\theta=\theta_1-\theta_2$であるから　$\tan\theta=\tan\left(\theta_1-\theta_2\right)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}=1$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

（2）$y=\sqrt{2}x$，　$y=mx$とx軸正方向とのなす角をそれぞれ$\theta_1,\ \theta_2$とすると　$\tan\theta_1=\sqrt{2},\ \tan\theta_2=m$

$0<m<\sqrt{2}$より　$\theta_1-\theta_2=\dfrac{\pi}{8}$　であるから　$\tan\dfrac{\pi}{8}=\tan\left(\theta_1-\theta_2\right)=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{\sqrt{2}-m}{1+\sqrt{2}m}$

ここで，右図においてxを求めると

$$x=1\times\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

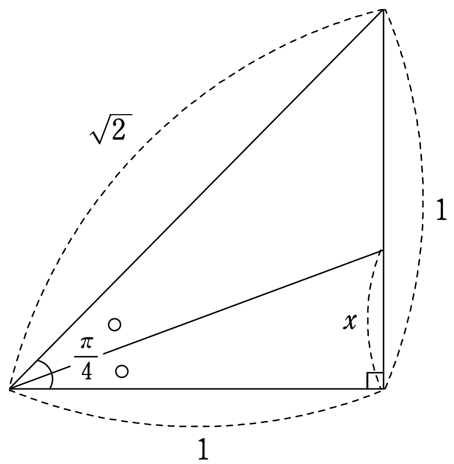
よって　$\tan\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}{1}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

したがって　$\dfrac{\sqrt{2}-m}{1+\sqrt{2}m}=\sqrt{2}-1$

$$\sqrt{2}-m=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1+\sqrt{2}m\right)$$

$$\left(3-\sqrt{2}\right)m=1$$

$m=\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$　これは　$0<m<\sqrt{2}$　を満たしている。



$\boxed{3-1}$

xy平面上に円$C: x^2+2kx+y^2-ky-5k-25=0$（$k$は実数の定数）がある。

(1) Cはkの値に関わらず，２つの定点A, Bを通ることを示せ。また，A, Bの座標を求めよ。

ただし，（Aのx座標）＜（Bのx座標）とする。

Cが線分ABを直径とする円であるとき，C上の点をPとする。さらに，点$\mathrm{Q}(-4, 4)$とし，

線分PQを$3:1$に内分する点をRとする。

(2) PがC上を動くとき，Rの軌跡を求めよ。

---

(1) $x^2+2kx+y^2-ky-5k-25=0 \Leftrightarrow (2x-y-5)k+x^2+y^2-25=0$ …①

①がkについての恒等式になるとき $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2-25=0 \end{cases}$

これを解くと $(x, y)=(0, -5), (4, 3)$

よって，Cはkの値に関わらず２つの定点を通ることが示された。

（Aのx座標）＜（Bのx座標）であるから $\mathrm{A}(0, -5), \mathrm{B}(4, 3)$

(2) Cは線分ABを直径とする円であるから，

中心は$(2, -1)$，半径は$\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{\sqrt{4^2+8^2}}{2}=2\sqrt{5}$ より $(x-2)^2+(y+1)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$ …②

$\mathrm{R}(x, y)$，$\mathrm{P}(s, t)$とおく。

Pは②上にあるから $(s-2)^2+(t+1)^2=20$ …③

Rは線分PQを$3:1$に内分する点であるから

$$\begin{cases} x=\dfrac{1\cdot s+3\cdot(-4)}{3+1}=\dfrac{s-12}{4} \\ y=\dfrac{1\cdot t+3\cdot 4}{3+1}=\dfrac{t+12}{4} \end{cases}$$ より $s=4x+12$ …④，$t=4y-12$ …⑤

③，④，⑤よりs, tを消去してx, yの関係式を求めると

$$\{(4x+12)-2\}^2+\{(4y-12)+1\}^2=20 \Leftrightarrow (4x+10)^2+(4y-11)^2=20$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{5}{4}$$

よって求めるRの軌跡は，中心$\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$，半径$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$の円。

$\boxed{3-2}$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は次の連立不等式が表す領域 D 内にある。

$$\begin{cases} x+2y-8\geqq 0 \\ 4x+y-32\leqq 0 \\ y\leqq 4 \end{cases}$$

(1) D を図示せよ。

(2) $\dfrac{y-1}{x+1}$ の最大値，最小値を求めよ。

(3) x^2+y^2 の最大値，最小値を求めよ。

---

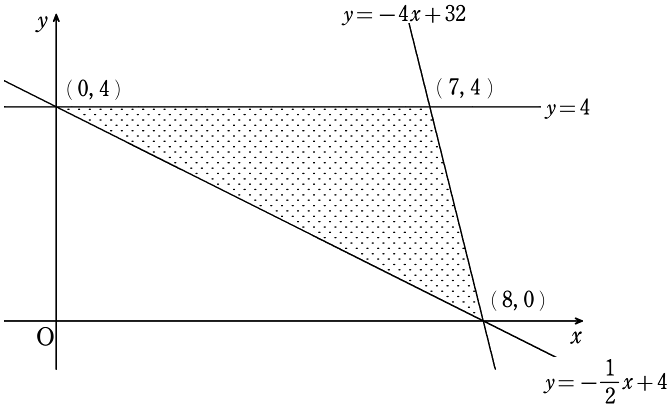
(1) $x+2y-8\geqq 0 \iff y\geqq -\dfrac{1}{2}x+4$ …①

$4x+y-32\leqq 0 \iff y\leqq -4x+32$ …②

$y\leqq 4$ …③

D すなわち①かつ②かつ③を図示すると，

図の打点部分になる。ただし，境界上の点を含む。



(2) $\dfrac{y-1}{x+1}=k$ とおくと，$y=k(x+1)+1$ より，これは $(-1,1)$ を通る傾き k の直線を表す。

$(x,\ y)$ が(1)の領域内を動くときを考える。

k が最大となるのは $(x,\ y)=(0,\ 4)$ のときであり，このとき最大値は $\dfrac{4-1}{0+1}=3$

k が最小となるのは $(x,\ y)=(8,\ 0)$ のときであり，このとき最小値は $\dfrac{0-1}{8+1}=-\dfrac{1}{3}$

〔別解〕

$\dfrac{y-1}{x+1}=\dfrac{y-1}{x-(-1)}$ であり，これは２点 $(-1,1)$，$(x,\ y)$ を通る直線の傾きを表す。

$(x,\ y)$ が(1)の領域内を動くときを考える。

この直線の傾きが最大となるのは $(x,\ y)=(0,\ 4)$ のときであり，最大値は $\dfrac{4-1}{0+1}=3$

この直線の傾きが最小となるのは $(x,\ y)=(8,\ 0)$ のときであり，最小値は $\dfrac{0-1}{8+1}=-\dfrac{1}{3}$

(3) $x^2+y^2=k$ とおくと，これは原点中心，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

$(x,\ y)$ が(1)の領域内を動くときを考える。

k が最大となるのは $\sqrt{k}$ が最大となるときと一致する。

$\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}>\sqrt{64}=8$ より

(1)の領域内で原点から最も遠い点は $(7,\ 4)$ であるから

最大値は $7^2+4^2=65\quad(x=7,\ y=4)$

k が最小となるのは $\sqrt{k}$ が最小となるときと一致する。

原点と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+4\ \left(\Leftrightarrow x+2y-8=0\right)$ の距離は $\dfrac{|0+2\cdot 0-8|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ であり，

$\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{5}}<\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}=4$ である。

原点から直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ に下ろした垂線の足を P_0 とすると

P_0 は直線 $y=2x$ と直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ との交点であるから $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{16}{5}\right)$

最小値は $\left(\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{16}{5}\right)^2=\dfrac{64}{5}\quad\left(x=\dfrac{8}{5},\ y=\dfrac{16}{5}\right)$

3－3

k は実数の定数とし，連立方程式 $\begin{cases} 2^y + 2^{x+2} = k \\ \log_{\sqrt{2}}(y-4) - 2\log_2(x-1) = 2 \end{cases}$ …（∗）がある。

(1) $k = 48$ のとき，（∗）の解を求めよ。

(2) （∗）の解が存在するような k の値の範囲を求めよ。

---

(1) $k = 48$ のとき

$$\begin{cases} 2^y + 2^{x+2} = 48 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-4) - 2\log_2(x-1) = 2 \end{cases}$$

２つ目の式において真数は正であるから $y-4>0$ かつ $x-1>0$

よって $x>1$ かつ $y>4$ …①

このもとで $\log_{\sqrt{2}}(y-4) - 2\log_2(x-1) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(y-4)}{\log_2\sqrt{2}} - 2\log_2(x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y-4) = \log_2(x-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y-4) = \log_2(x-1) + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(y-4) = \log_2 2(x-1)$$

よって $y-4 = 2(x-1)$ より $y = 2x+2$ …②

②より $2^y + 2^{x+2} = 48 \Leftrightarrow 2^{2x+2} + 2^{x+2} = 48$

$$\Leftrightarrow 4(2^x)^2 + 4\cdot 2^x = 48$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x+4)(2^x-3) = 0$$

$2^x > 0$ であるから $2^x = 3$

これから $x = \log_2 3$ であり， $y = 2\log_2 3 + 2$ となるが，これらは①を満たしている。

よって $x = \log_2 3$， $y = 2\log_2 3 + 2$

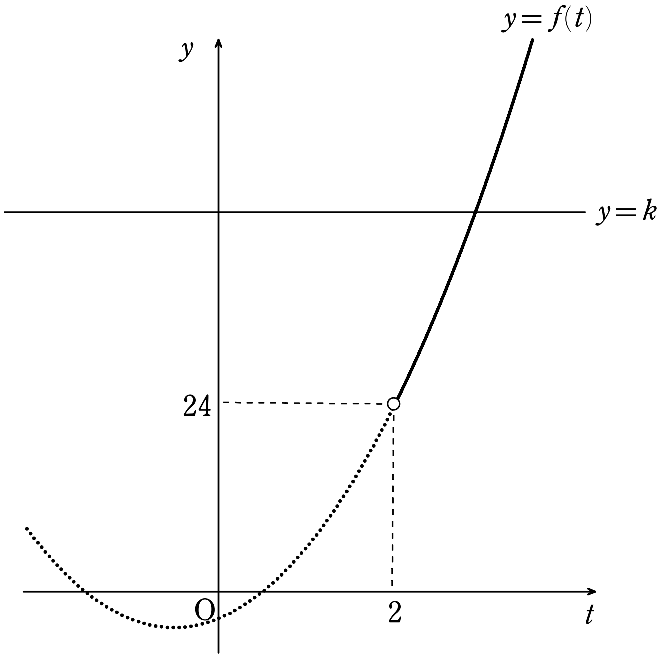
(2) (1)より

$$\begin{cases} 2^y+2^{x+2}=k \\ \log_{\sqrt{2}}(y-4)-2\log_2(x-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y+2^{x+2}=k \\ y=2x+2 \\ x>1 \\ y>4 \end{cases}$$ である。

$2^y+2^{x+2}=k \Leftrightarrow 2^{2x+2}+2^{x+2}=k \Leftrightarrow 4(2^x)^2+4\cdot 2^x=k$

$2^x=t$ とおくと $x>1$ より $t>2$ であり，$4t^2+4t=k$

$f(t)=4t^2+4t$ とおくと $f(t)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-1$ であるから，$y=f(t)$ のグラフは次の図の通り。



$y=f(t)$ と $y=k$ のグラフが $t>2$ において共有点をもつような k の値の範囲を考えればよい。

したがって，求める k の値の範囲は $k>24$

$\boxed{3-4}$

aは正の定数とし，xの関数　$f(x)=(\log_4 ax)\left(\log_4 \dfrac{x}{4a}\right)$ がある。

(1)　$f(x)$の最小値m，およびそのときのxの値を求めよ。

(2)　$m \geqq -4$であるとき，aのとり得る値の範囲を求めよ。

---

(1) 真数は正であるから　$ax>0$　かつ　$\dfrac{x}{4a}>0$　よって　$x>0$

このもとで，$f(x)=(\log_4 ax)\left(\log_4 \dfrac{x}{4a}\right)$

$$=(\log_4 a+\log_4 x)(\log_4 x-\log_4 4a)$$

$$=(\log_4 x+\log_4 a)(\log_4 x-\log_4 a-1)$$

$\log_4 x=t$とおくと，tはすべての実数値をとり

$f(x)=g(t)$

$$=(t+\log_4 a)(t-\log_4 a-1)$$

$$=t^2-t-\log_4 a(\log_4 a+1)$$

$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\log_4 a(\log_4 a+1)$$

となる。よって$f(x)$は，$t=\dfrac{1}{2}$のときに最小となるが，

このとき，$\log_4 x=\dfrac{1}{2}$　より　$x=2$　である。

したがって，求める最小値mは，$x=2$のとき　$m=-\dfrac{1}{4}-\log_4 a(\log_4 a+1)$

（2） $m \geqq -4$ より $-\dfrac{1}{4} - \log_4 a(\log_4 a + 1) \geqq -4$

$$\Leftrightarrow\ 1 + 4\log_4 a(\log_4 a + 1) \leqq 16$$

$$\Leftrightarrow\ 4(\log_4 a)^2 + 4\log_4 a - 15 \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow\ (2\log_4 a + 5)(2\log_4 a - 3) \leqq 0$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{5}{2} \leqq \log_4 a \leqq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 4^{-\frac{5}{2}} \leqq a \leqq 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{32} \leqq a \leqq 8$$

$\boxed{4-1}$

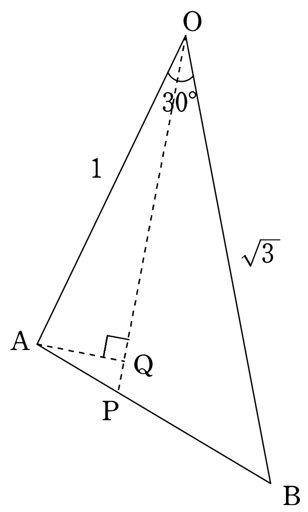
三角形OABにおいて，$\mathrm{OA}=1$, $\mathrm{OB}=\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{AOB}=30^\circ$とする。

辺ABを$1:2$に内分する点をPとし，Aから直線OPに下ろした垂線とOPとの交点をQとする。

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ。

線分OPに関してAと対称な点をCとし，直線OCと直線ABの交点をRとする。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で表せ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=1\cdot\sqrt{3}\cos 30^\circ=\dfrac{3}{2}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

３点O, P, Qは同一直線上にあるから

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　（kは実数，$k\neq 0$）と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{2k}{3}-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$は垂直であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left\{\left(\frac{2k}{3}-1\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$$

$$=\frac{k}{9}\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left\{(2k-3)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$$

$$=\frac{k}{9}\left\{2(2k-3)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+(4k-3)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\right\}$$

$$=\frac{k}{9}\left\{2(2k-3)+(4k-3)\cdot\frac{3}{2}+3k\right\}$$

$$=\frac{k}{18}(26k-21)=0$$　　よって　$k=\dfrac{21}{26}$

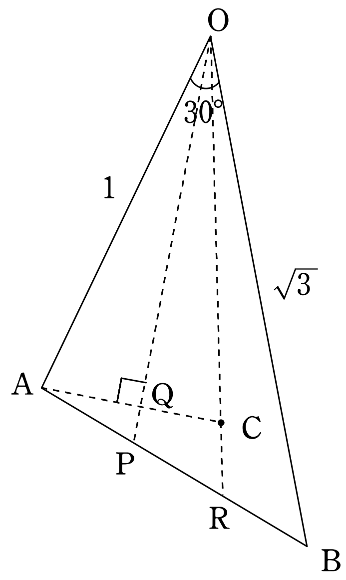
したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{21}{26}\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{7}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{7}{26}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) (1)より　$\overrightarrow{AQ}=-\dfrac{6}{13}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{26}\overrightarrow{OB}$　である。

したがって　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AQ}$

$$=\overrightarrow{OA}+2\left(-\frac{6}{13}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{26}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$=\frac{1}{13}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{13}\overrightarrow{OB}$$



３点 O, C, R は同一直線上にあるから，

$\overrightarrow{OR}=t\overrightarrow{OC}$　（t は実数，$t\neq 0$）と表せ，

$$\overrightarrow{OR}=t\left(\frac{1}{13}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{13}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{t}{13}\overrightarrow{OA}+\frac{7t}{13}\overrightarrow{OB}$$

R は直線 AB 上にあるので，$\dfrac{t}{13}+\dfrac{7t}{13}=1$　　よって　$t=\dfrac{13}{8}$

したがって　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{13}{8}\left(\dfrac{1}{13}\overrightarrow{OA}+\dfrac{7}{13}\overrightarrow{OB}\right)$

$$=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{8}\overrightarrow{OB}$$

$\boxed{4-2}$

四面体OABCにおいて，$OA=3\sqrt{2}$，$OB=4$，$OC=3$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{9}{2}$，　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{11}{2}$，

$\angle BAC=60^\circ$　とする。

(1)　AB，AC，BCを求めよ。

(2)　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$を求めよ。

$\angle BAC$の二等分線と辺BCの交点をDとする。

(3)　$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$で表せ。

三角形OACの重心と点Bを結ぶ線分が三角形OADと交わる点をEとする。

(4)　$\overrightarrow{OE}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$で表せ。

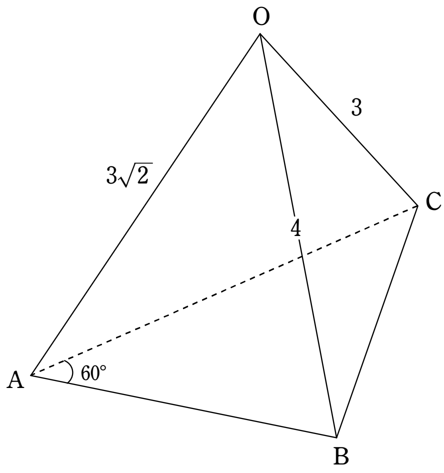
---

(1)　$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OA}|^2=16-2\cdot\dfrac{9}{2}+18=25$

よって　$AB=|\overrightarrow{AB}|=5$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OA}|^2=9-2\cdot\dfrac{11}{2}+18=16$

よって　$AC=|\overrightarrow{AC}|=4$



△ABCにおいて余弦定理より

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 60^\circ$$
$$=25+16-2\cdot5\cdot4\cdot\frac{1}{2}$$
$$=21$$

よって　$BC=\sqrt{21}$

(2)　△OBCにおいて余弦定理より

$$\cos\angle BOC=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2OB\cdot OC}=\frac{16+9-21}{2\cdot3\cdot4}=\frac{1}{6}$$

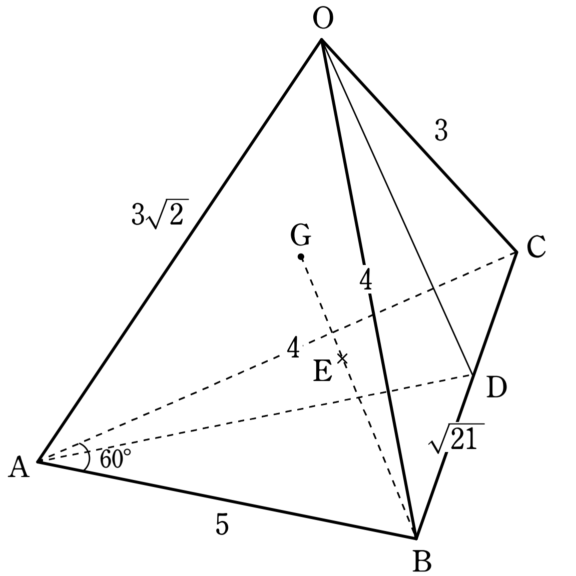
よって　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=OB\cdot OC\cos\angle BOC$

$$=4\cdot3\cdot\frac{1}{6}$$
$$=2$$

(3) AD は∠BAC の二等分線であるから BD : DC = 5 : 4

よって $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …①

(4)



△OAC の重心を G とすると $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …②

E は△OAD 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ （s, t は実数）と表せる。

①より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{4t}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5t}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …③

３点 G, E, B は同一直線上にあるから $\overrightarrow{\mathrm{GE}}=k\overrightarrow{\mathrm{GB}}$ （k は実数）と表せる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)$ であり，

②より $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OG}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1-k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1-k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ …④

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はすべて $\vec{0}$ ではなく，どの２つのベクトルも平行でないから

③，④より $s=\dfrac{1-k}{3}$，$\dfrac{4t}{9}=k$，$\dfrac{5t}{9}=\dfrac{1-k}{3}$

これを解くと $s=\dfrac{5}{19}$，$t=\dfrac{9}{19}$，$k=\dfrac{4}{19}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{5}{19}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{4}{19}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{5}{19}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\boxed{4-3}$

数列$\{a_n\}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）が，$a_1=1,\ 2a_{n+1}-a_n=(a_1+a_2)n$ により定められている。

(1) a_2を求めよ。

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$（$n=1, 2, 3, \cdots$）とする。

(2) b_n，b_{n+1}の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_nの一般項を求めよ。

---

(1) $2a_{n+1}-a_n=(a_1+a_2)n$ $\cdots$（＊）において$n=1$として

$2a_2-a_1=(a_1+a_2)\cdot 1$

$a_1=1$ より $2a_2-1=1+a_2$ であるから $a_2=2$

(2) $a_1=1$，$a_2=2$であるから $2a_{n+1}-a_n=3n$ $\cdots$①

①においてnを$n+1$とすると，$2a_{n+2}-a_{n+1}=3(n+1)$ $\cdots$② であり，

②－①より $2(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=3$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ であるから $2b_{n+1}-b_n=3$ より $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$

(3) $b_1 = a_2 - a_1 = 2-1=1$ である。

$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} \Leftrightarrow b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3)$ であるから

$b_n - 3 = (b_1 - 3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ より $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3$

$\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + 3\right\}$$

$$= 1 + \frac{-2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}} + 3(n-1)$$

$$= 1 - 4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} + 3(n-1)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3n - 6 \quad \cdots ③$$

③において $n=1$ とすると $4\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3 - 6 = 1$ より，③は $n=1$ のときも成り立っている。

したがって，$a_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3n - 6 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\boxed{4-4}$

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，分数 $\dfrac{1}{n}$ を n 個ずつ並べてできる数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$$

がある。

(1) 最初に現れる $\dfrac{1}{30}$ は，この数列の何項目か求めよ。

(2) この数列の第 50 項，および第 100 項を求めよ。

(3) この数列の第 51 項から第 100 項までの和を求めよ。

---

(1) 第 n 群に n 個の項が含まれるように数列を区切る。

この区切り方によって，第 n 群には $\dfrac{1}{n}$ が n 個ずつ含まれる。

よって，最初に現れる $\dfrac{1}{30}$ は第 30 群の 1 番目の項である。

ここで，第 1 群から第 n 群までの項数は $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 項であるから

第 1 群から第 29 群までの項数は $\dfrac{1}{2}\cdot 29(29+1)=435$ 項あるので

第 30 群の 1 番目の項 $\dfrac{1}{30}$ はこの数列の 436 項目である。

(2) 50 項目が第 n 群にあるとすると

$\dfrac{1}{2}(n-1)n<50\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1) \iff (n-1)n<100\leqq n(n+1)$ …①

$9\cdot 10<100\leqq 10\cdot 11$ より①を満たす自然数 n は $n=10$ である。

よって 50 項目は第 10 群に含まれる。よって $\dfrac{1}{10}$

100 項目が第 n 群にあるとすると

$\dfrac{1}{2}(n-1)n<100\leqq\dfrac{1}{2}n(n+1) \iff (n-1)n<200\leqq n(n+1)$ …②

$13\cdot 14<200\leqq 14\cdot 15$ より②を満たす自然数 n は $n=14$ である。

よって 100 項目は第 14 群に含まれる。よって $\dfrac{1}{14}$

(3) 第 1 群から第 9 群までには $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot(9+1)=45$ 項あるから，51 項目は第 10 群の 6 番目の項である。

第 1 群から第 13 群までには $\frac{1}{2}\cdot 13\cdot(13+1)=91$ 項あるから，100 項目は第 14 群の 9 番目の項である。

したがって，求める和は

$$\begin{aligned} a_{51}+a_{52}+\cdots+a_{99}+a_{100} &= \underbrace{\left(a_{51}+\cdots+a_{55}\right)}_{\text{第10群の後半5項}}+\underbrace{\left(a_{56}+\cdots+a_{91}\right)}_{\text{第11 ·12 ·13群}}+\underbrace{\left(a_{92}+\cdots+a_{100}\right)}_{\text{第14群の前半9項}} \\ &= \frac{1}{10}\times 5+\frac{1}{11}\times 11+\frac{1}{12}\times 12+\frac{1}{13}\times 13+\frac{1}{14}\times 9 \\ &= \frac{1}{2}+1+1+1+\frac{9}{14} \\ &= \frac{29}{7} \end{aligned}$$

$\boxed{5-1}$

k は正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx+8k$ がある。

(1) $f(x)$ が極値をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値が 0 であるとき，k の値を求めよ。

---

(1) $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx+8k$

$f'(x)=3x^2-6(k+1)x+12k$

$f(x)$ は３次関数であるから，極値をもつときには極大値と極小値を同時にもつ。

このとき，２次方程式 $f'(x)=0$ が異なる２つの実数解をもつので，

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=9(k+1)^2-3\cdot 12k>0$

$\Leftrightarrow \quad k^2-2k+1>0$

$\Leftrightarrow \quad (k-1)^2>0$

よって，求める k の値の範囲は　$k<1,\ k>1$

(2) $f'(x)=3x^2-6(k+1)x+12k=3\{x^2-2(k+1)x+4k\}=3(x-2)(x-2k)$

（ｉ）$k>1$ のとき

$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋
$f(x)$	$8k$	↗		↘	$-4k^3+12k^2+8k$	↗

$k>1$ より $8k>8$ であるから

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値が 0 となる条件は

$f(2k)=-4k^3+12k^2+8k=0 \Leftrightarrow k(k^2-3k-2)=0$

$k>0$ より $k=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$　これは $k>1$ を満たしている。

（ⅱ）$k=1$のとき

$f'(x)=(x-2)^2$ であり，$x \geqq 0$において$f(x)$は単調増加である。

$x \geqq 0$における$f(x)$の最小値は　$f(0)=8k=8$

したがって，最小値が 0 とはならず，満たさない。

（ⅲ）$0<k<1$のとき

$f(x)$の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	−	0	＋
$f(x)$	$8k$	↗		↘	$20k-4$	↗

$k>0$　より　$8k>0$　であるから

$x \geqq 0$における$f(x)$の最小値が0となる条件は

$f(2)=20k-4=0$　より　$k=\dfrac{1}{5}$　これは$0<k<1$を満たしている。

以上より，求めるkの値は　$k=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{1}{5}$

$\boxed{5-2}$

xy 平面上に

曲線 $C : y = 2x^3 + 3x^2 - 4x$

直線 $\ell : y = 8x + k$ （k は実数の定数）

があり，C と ℓ は異なる３つの交点 A, B, C をもつとする。

(1) k のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) A, B, C の x 座標をそれぞれ α, β, γ （$\alpha < \beta < \gamma$）とする。

$-\dfrac{1}{2} < \beta < 1$ のとき，α のとり得る値の範囲を求めよ。

---

(1) C と ℓ を連立させて

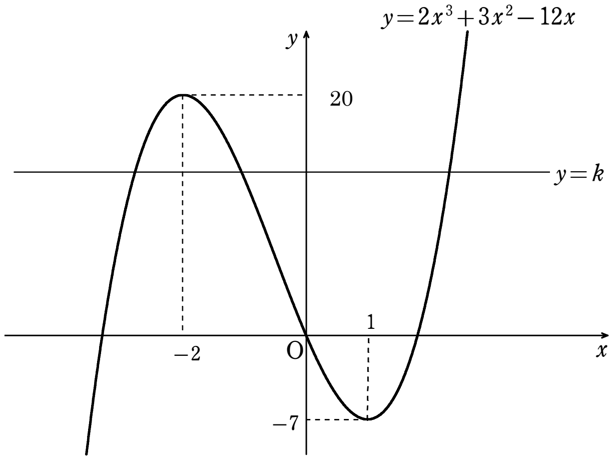
$2x^3 + 3x^2 - 4x = 8x + k \iff 2x^3 + 3x^2 - 12x = k$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ とおくと

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$ であり

$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$

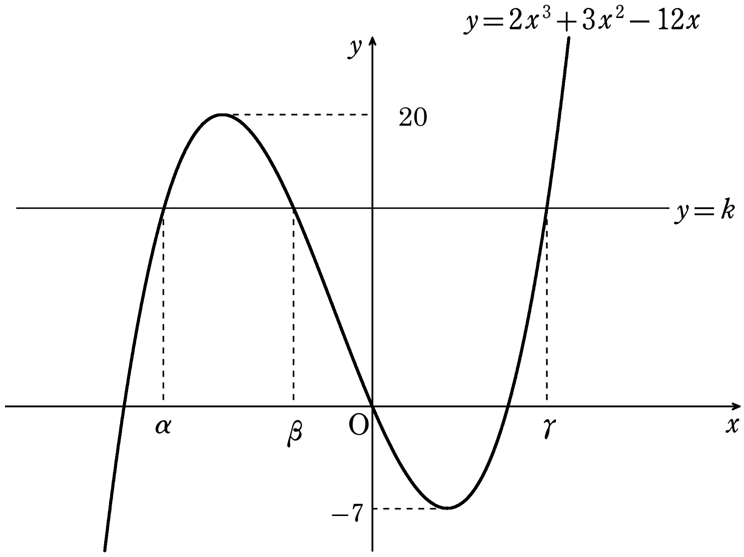


C と ℓ が異なる３つの交点 A, B, C をもつとき，

$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフが異なる３つの共有点をもつので，

求める k の値の範囲は $-7 < k < 20$

(2) $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-12\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{2}$， $f(1)=-7$ である。



β が $-\frac{1}{2}<\beta<1$ の範囲を動くとき，α の動く範囲は，グラフを利用して考えると

「$f(x)=-7$ となる x（$x<1$）」より大きくて

「$f(x)=\frac{13}{2}$ となる x $\left(x<-\frac{1}{2}\right)$ 」より小さい範囲である。

次に，それらの x をそれぞれ求める。

$$2x^3+3x^2-12x=-7 \iff (x-1)^2(2x+7)=0$$

$$x<1 \text{ より } x=-\frac{7}{2}$$

$$2x^3+3x^2-12x=\frac{13}{2} \iff 4x^3+6x^2-24x-13=0$$

$$\iff (2x+1)(2x^2+2x-13)=0$$

$$x<-\frac{1}{2} \text{ より } x=\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$$

よって，α のとり得る値の範囲は $-\frac{7}{2}<\alpha<\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{5-3}$

関数 $f(x)$, $g(x)$ は

$$f(x)=3x+\int_0^2 g(t)\,dt\,,\quad g(x)=x\,f(x)+\int_0^2 (t-x)\,f(t)\,dt$$

を満たしている。このとき， $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ求めよ。

$$g(x)=x\,f(x)+\int_0^2 (t-x)\,f(t)\,dt$$

$$=x\left\{3x+\int_0^2 g(t)\,dt\right\}+\int_0^2 t\,f(t)\,dt-x\int_0^2 f(t)\,dt$$

$$=3x^2+x\int_0^2 g(t)\,dt+\int_0^2 t\,f(t)\,dt-x\int_0^2 f(t)\,dt$$

ここで， $a=\int_0^2 g(t)\,dt$， $b=\int_0^2 t\,f(t)\,dt$， $c=\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと

$f(x)=3x+a$， $g(x)=3x^2+ax+b-cx=3x^2+(a-c)x+b$ である。

したがって，

$$a=\int_0^2 \left\{3t^2+(a-c)t+b\right\}dt=\left[t^3+\frac{a-c}{2}t^2+bt\right]_0^2=8+2a-2c+2b$$

よって， $a+2b-2c=-8$ …①

$$b=\int_0^2 t(3t+a)\,dt=\int_0^2 (3t^2+at)\,dt=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2=8+2a$$

よって， $2a-b=-8$ …②

$$c=\int_0^2 (3t+a)\,dt=\left[\frac{3}{2}t^2+at\right]_0^2=6+2a$$

よって， $2a-c=-6$ …③

①，②，③を解くと $a=-12$, $b=-16$, $c=-18$

したがって

$f(x)=3x-12$， $g(x)=3x^2+6x-16$

5－4

aは実数の定数とし，曲線$C: y=x^2-4|x-a|$ がある。Cと異なる２点で接する直線をℓとする。

(1) ℓの方程式をaを用いて表せ。

(2) Cとℓで囲まれる図形の面積Sを求めよ。

$x \geqq a$のとき　$y=x^2-4|x-a|=x^2-4x+4a=(x-2)^2-4+4a$

$f(x)=x^2-4x+4a$ …① とおく。

$x<a$のとき　$y=x^2-4|x-a|=x^2+4x-4a=(x+2)^2-4-4a$

$g(x)=x^2+4x-4a$ …② とおく。

(1) ①上の点$\mathrm{T}(t,\ f(t))$における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t) \iff y-(t^2-4t+4a)=(2t-4)(x-t)$$

$$\iff y=(2t-4)x-t^2+4a \quad \cdots③$$

②上の点$\mathrm{S}(s,\ g(s))$における接線の方程式は

$$y-g(s)=g'(s)(x-s) \iff y-(s^2+4s-4a)=(2s+4)(x-s)$$

$$\iff y=(2s+4)x-s^2-4a \quad \cdots④$$

ℓはCと異なる２点で接する直線であり，③と④が一致するときがℓであるから

係数を比較して $\begin{cases} 2t-4=2s+4 \\ -t^2+4a=-s^2-4a \end{cases}$

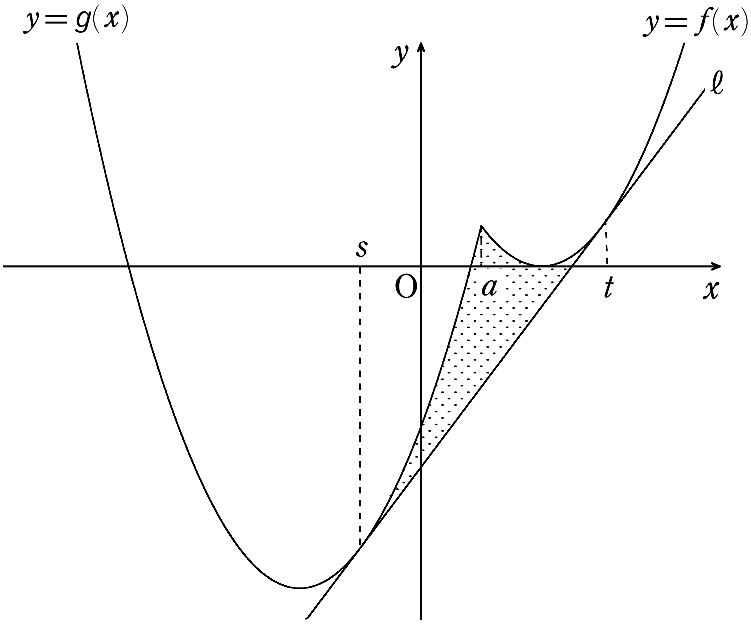
$2t-4=2s+4 \iff s-t=-4$ …⑤

$-t^2+4a=-s^2-4a \iff (s+t)(s-t)=-8a$　⑤より　$s+t=2a$ …⑥

⑤，⑥より　$s=a-2$，$t=a+2$

よって，ℓの方程式は　$y=2ax-a^2-4$

(2)



$$S=\int_s^a \{g(x)-(2ax-a^2-4)\}\,dx+\int_a^t \{f(x)-(2ax-a^2-4)\}\,dx$$

$$=\int_s^a (x-s)^2\,dx+\int_a^t (x-t)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-s)^3\right]_s^a+\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_a^t$$

$$=\frac{1}{3}(a-s)^3-\frac{1}{3}(a-t)^3$$

$$=\frac{1}{3}\{a-(a-2)\}^3-\frac{1}{3}\{a-(a+2)\}^3$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{16}{3}$$