# Mathematics Reflection

　このテキストは，数学ＩＡⅡＢの範囲の基本的・標準的な良問で構成されています。良問が揃っているので，もちろんどの学部の受験対策にも有効です。講習で最大限の効果を得るために，参加にあたっては必ず予習・復習をしてください。

５日間完走できれば，かなりの力が付くことを保証します。

＜予習＞

１．<u>基本事項をマスターできているか確認する</u>

　苦手なところやうろ覚えであるところはきちんと復習しておきましょう。

２．<u>問題に取り組む</u>

　数学の問題は「正しい論理の積み重ね」により，結論を得ることができます。

　つまずいた場合は，どこでつまずいたのかを明らかにしておいてください。

＜復習＞

１．<u>考え方や解法のポイントを確認する</u>

　どこまでを正しく考えることができたのか，つまずいたのは何故なのか確認します。

　必要な公式はきちんと覚え，次回からは確実に使えるようにしましょう。

２．<u>補充問題（Assist）を解く</u>

　各日とも，講習で扱う問題とは別に補充問題を配付します。解答・解説を付けておきますので，

　数学的思考が身に付いているかの確認，さらなる数学力養成のため取り組んでみてください。

$\boxed{1-1}$

　次の問いに答えよ。

(1) $ab+2a-2b-8=0$ を満たす整数 $a,\ b$ の組は全部で何組あるか求めよ。

(2) $(m+n)(3m-n)-4m+4n-8=0$ を満たす整数 $m,\ n$ の組をすべて求めよ。

$\boxed{1-2}$

　$k$ は実数の定数とし，$x$ の関数 $f(x)=-(x^2+2x)^2-2k(x^2+2x)+2k^2-4k-4$ がある。

(1) $k=-1$ のとき，$f(x)$ の最大値とそのときの $x$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の最大値が $0$ となるような $k$ の値を求めよ。

$\boxed{1-3}$

　次の問いに答えよ。

（A）６個の白球を３人に配る。

　(1) 白球を受け取らない人がいてもよいような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

　(2) 全員が少なくとも１個の白球を受け取るような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

（B）６個の相異なる色の球を３人に配る。

　(1) 球を受け取らない人がいてもよいような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

　(2) 全員が少なくとも１個の球を受け取るような配り方は全部で何通りあるか求めよ。

$\boxed{1-4}$

　箱の中に，１から４までの数字が１つずつ書かれたカードがそれぞれ２枚，合計８枚ある。

　ここから３枚取り出すとき，その数字の最大値を $X$，最小値を $Y$ とする。

(1) $X=4$ となる確率を求めよ。

(2) $X-Y=3$ となる確率を求めよ。

2－1

三角形ABCにおいて，$\angle A=30^\circ$，$AB=4$, $AC=3$ とする。
辺BC上（ただし，B, Cは除く）の点をPとし，Pと直線ABの距離を$x$，Pと直線ACの距離を$y$とする。

(1) 三角形ABCの面積を求めよ。

(2) $BP:PC=2:1$ であるとき，$x$, $y$の値を求めよ。

(3) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}$の最小値を求めよ。また，そのときの$x$, $y$の値を求めよ。

2－2

三角形ABCは，$AB=5$, $BC=19$, $CA=16$ を満たしている。

(1) $\angle A$の大きさ，および三角形ABCの外接円の半径を求めよ。

$\angle BAC$の二等分線が，三角形ABCの外接円と交わる点をDとする。

(2) BD，ADを求めよ。

三角形BCDの内心をIとする。Iから線分AC, ADに下ろした垂線の足をそれぞれE, Fとする。

(3) 三角形AEFの面積を求めよ。

2－3

長方形ABCDにおいて，$AB=1$, $BC=1+\sqrt{3}$ とする。辺CD, DA上に点P, Qを$\angle PBQ=\dfrac{\pi}{3}$となるようにおき，$\angle CBP=\theta$とし，三角形BPQの面積を$S$とする。

(1) $S$を$\theta$で表せ。

(2) $S$の最小値を求めよ。また，そのときの$\theta$の値を求めよ。

2－4

次の問いに答えよ。

(1) 2つの直線 $y=2x$, $y=\dfrac{1}{3}x$ のなす角を$\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$\theta$を求めよ。

(2) 2つの直線$y=\sqrt{2}x$， $y=mx$のなす角が$\dfrac{\pi}{8}$ $\left(0<m<\sqrt{2}\right)$ であるとき，$m$を求めよ。

3－1

$xy$ 平面上に円 $C: x^2+2kx+y^2-ky-5k-25=0$（$k$ は実数の定数）がある。

(1) $C$ は $k$ の値に関わらず，２つの定点 A, B を通ることを示せ。また，A, B の座標を求めよ。
ただし，（A の $x$ 座標）＜（B の $x$ 座標）とする。

C が線分 AB を直径とする円であるとき，C 上の点を P とする。さらに，点 Q$(-4, 4)$ とし，線分 PQ を $3:1$ に内分する点を R とする。

(2) P が C 上を動くとき，R の軌跡を求めよ。

3－2

点 P$(x, y)$ は次の連立不等式が表す領域 $D$ 内にある。

$$\begin{cases} x+2y-8 \geqq 0 \\ 4x+y-32 \leqq 0 \\ y \leqq 4 \end{cases}$$

(1) $D$ を図示せよ。

(2) $\dfrac{y-1}{x+1}$ の最大値，最小値を求めよ。

(3) $x^2+y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

3－3

$k$ は実数の定数とし，連立方程式 $\begin{cases} 2^y+2^{x+2}=k \\ \log_{\sqrt{2}}(y-4)-2\log_2(x-1)=2 \end{cases}$ …（＊）がある。

(1) $k=48$ のとき，（＊）の解を求めよ。

(2) （＊）の解が存在するような $k$ の値の範囲を求めよ。

3－4

$a$ は正の定数とし，$x$ の関数 $f(x)=\left(\log_4 ax\right)\left(\log_4 \dfrac{x}{4a}\right)$ がある。

(1) $f(x)$ の最小値 $m$，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(2) $m \geqq -4$ であるとき，$a$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{4-1}$

三角形OABにおいて，$OA=1,\ OB=\sqrt{3},\ \angle AOB=30^\circ$ とする。

辺ABを$1:2$に内分する点をPとし，Aから直線OPに下ろした垂線とOPとの交点をQとする。

(1) 内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$を求めよ。また，$\overrightarrow{OQ}$を$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$で表せ。

線分OPに関してAと対称な点をCとし，直線OCと直線ABの交点をRとする。

(2) $\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OR}$をそれぞれ$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$で表せ。

$\boxed{4-2}$

四面体OABCにおいて，$OA=3\sqrt{2},\ OB=4,\ OC=3,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{9}{2},\ \ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{11}{2},$

$\angle BAC=60^\circ$ とする。

(1) $AB,\ AC,\ BC$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$を求めよ。

$\angle BAC$の二等分線と辺BCの交点をDとする。

(3) $\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$で表せ。

三角形OACの重心と点Bを結ぶ線分が三角形OADと交わる点をEとする。

(4) $\overrightarrow{OE}$を$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$で表せ。

$\boxed{4-3}$

数列$\{a_n\}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が，$a_1=1,\ 2a_{n+1}-a_n=(a_1+a_2)n$ により定められている。

(1) $a_2$を求めよ。

$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とする。

(2) $b_n$，$b_{n+1}$の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) $a_n$の一般項を求めよ。

$\boxed{4-4}$

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，分数$\dfrac{1}{n}$を$n$個ずつ並べてできる数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \cdots$$

がある。

(1) 最初に現れる$\dfrac{1}{30}$は，この数列の何項目か求めよ。

(2) この数列の第 50 項，および第 100 項を求めよ。

(3) この数列の第 51 項から第 100 項までの和を求めよ。

$\boxed{5-1}$

$k$ は正の定数とし，$x$ の関数 $f(x)=x^3-3(k+1)x^2+12kx+8k$ がある。

(1) $f(x)$ が極値をもつような定数 $k$ の値の範囲を求めよ。

(2) $x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値が 0 であるとき，$k$ の値を求めよ。

$\boxed{5-2}$

$xy$ 平面上に

曲線 $C: y=2x^3+3x^2-4x$

直線 $\ell: y=8x+k$ （$k$ は実数の定数）

があり，$C$ と $\ell$ は異なる３つの交点 A, B, C をもつとする。

(1) $k$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) A, B, C の $x$ 座標をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma$ （$\alpha<\beta<\gamma$）とする。

$-\dfrac{1}{2}<\beta<1$ のとき，$\alpha$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\boxed{5-3}$

関数 $f(x),\ g(x)$ は

$$f(x)=3x+\int_0^2 g(t)\,dt,\quad g(x)=x\,f(x)+\int_0^2 (t-x)\,f(t)\,dt$$

を満たしている。このとき，$f(x),\ g(x)$ をそれぞれ求めよ。

$\boxed{5-4}$

$a$ は実数の定数とし，曲線 $C: y=x^2-4|x-a|$ がある。$C$ と異なる２点で接する直線を $\ell$ とする。

(1) $\ell$ の方程式を $a$ を用いて表せ。

(2) $C$ と $\ell$ で囲まれる図形の面積 $S$ を求めよ。