ロピタルの定理

高校数学の範囲外ではあるものの，知っていると心強いという知識はいろいろあります。その１つが「ロピタルの定理」です。極限値を求めようとすると形式的に不定形になってしまうとき，威力を発揮する定理です。まず，「不定形」とは何か明らかにしておきます。

＜不定形とは＞

$x=a$ の近くで定義された連続関数 $f(x),\ g(x)$ が

$f(a)=g(a)=0$ のとき，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の $x=a$ における極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ を求めようとして分母分子をそれぞれの極限値で置き換えると形式的に $\dfrac{0}{0}$ になります。

このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ は存在することもありますし，存在しないこともあります。

この状況を $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ は $x=a$ で不定形 $\dfrac{0}{0}$ になるといいます。同様にして $\dfrac{\infty}{\infty}$ の意味も定められます。

ロピタルの定理とは次のような定理です。

＜不定形 $\dfrac{0}{0}$ についてのロピタルの定理＞

（1） $f(x),\ g(x)$ がともに $x=a$ の近くで連続な導関数をもち，$f(a)=g(a)=0$ かつ $g'(a)\neq 0$ とする。

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

（2） $f(x),\ g(x)$ が十分大きい x に対して微分可能で，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ かつ $g'(a)$ は十分大きい x に対しては $g'(x)\neq 0$ とする。

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

＜不定形 $\dfrac{\infty}{\infty}$ についてのロピタルの定理＞

（1） $f(x),\ g(x)$ が十分大きい x に対して微分可能で，

$x\to\infty$ のとき，ともに $f(x)\to\infty$，$g(x)\to\infty$ で，十分大きい x に対しては $g'(x)\neq 0$ とする。

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

(2) (1)上と同様の仮定のもとに $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ となる。

$\dfrac{0}{0}$ でも $\dfrac{\infty}{\infty}$ でも，不定形であれば適用できるというわけで、大変強力な定理です。

＜ロピタルの定理の使用例＞

（例１）$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos 3x}{\log\cos 2x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos 3x}{\log\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\log\cos 3x)'}{(\log\cos 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{\dfrac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\tan 3x}{\tan 2x}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\tan 3x)'}{(\tan 2x)'}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{\cos^2 3x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

（例２）$\displaystyle\lim_{x\to +0}x\log x$

$$\lim_{x\to +0}x\log x=\lim_{x\to +0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{(\log x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

大学入試において，ロピタルの定理を使わなければ解けない問題が出題されることはありません。

ロピタルの定理は検算に便利ですが，高校で学習する内容に含まれないこと。

証明することが高校の数学レベルを超えることから，大学入試の答案で使用することには昔から賛否あります。

数学的には正しいことではありますが，大学入試の答案に使うのはやりすぎでしょう。

使ってよい道具というものは，使い手のレベルによって異なるものです。