直交する直円柱の共通部分の体積

不等式で表された立体の体積を求める際，立体の形が想像できればそれは大変結構なことですが，誰にでも想像できるものではないでしょう。このような立体の体積の求積には、ある平面でこの立体を切断し，断面積を定量し，積分によって立体の体積を求めることになりますが，一体どんな平面で切断すればよいのでしょうか。

空間で立体を切断する場合，単純に考えれば「xy, yz, zxの３平面」に平行に切断する方法が考えられます。それは方程式としてはある変数について固定すること，つまり「$z=t,\ x=t,\ y=t$とする（tは定数)」とすることになります。この３つのうち，どの平面で切断したら定量上有利なのでしょうか。

それは，断面積を定量する際に最も計算しやすい平面で切断するのが良いということになるわけで，優先順位は次の通りです。

１．対称性を保つ変数

２．最高次の変数

３．最頻出の変数

意外と忘れられがちなのが１で，回転体の体積を求積する場合，回転軸に垂直な平面で切断したのを覚えているでしょうか。それはまさに「どこで切っても円になる」という切り口の対称性を保存する変数で切っているのです。

３本の直円柱の共通部分の体積を求める前に，２本の直円柱の共通部分の体積を求めてみます。

問題１　　直交する半径１の２本の円柱の共通部分の体積を求めよ。

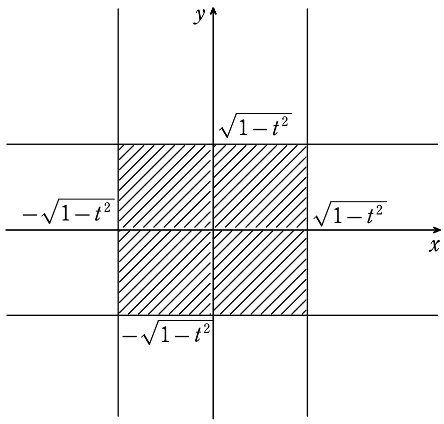
〔解答〕座標を導入する。

つまり，題意の図形は

$$\begin{cases} x^2+z^2 \leqq 1 \\ y^2+z^2 \leqq 1 \end{cases}$$

を満たす点(x, y, z)の存在領域である。

立体を$z=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$で切断する。



図より，断面積$S(t)$は　$S(t)=4(1-t^2)$　であるから，求める体積Vは

$$V=\int_{-1}^{1} S(t)dt=\int_{-1}^{1} 4(1-t^2)dt=8\int_0^1 (1-t^2)dt=8\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{16}{3}$$

次に，３本の直円柱の共通部分の体積を求めます。

問題２　　直交する半径１の３本の円柱の共通部分の体積を求めよ。

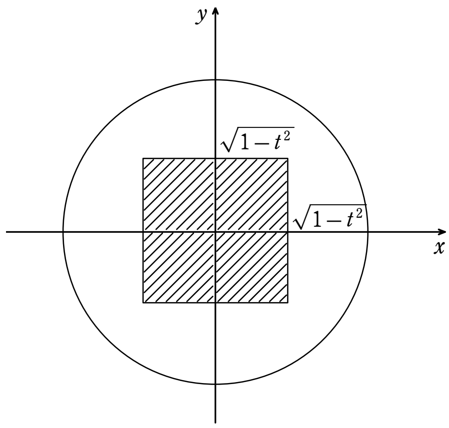
〔解答〕座標を導入する。つまり，題意の図形は

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y^2+z^2 \leqq 1 \\ z^2+x^2 \leqq 1 \end{cases}$$

を満たす点 (x, y, z) の存在領域である。

対称性より，$0 \leqq z \leqq 1$ の部分の体積を求め，それを２倍して求める。

立体を $z=t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ で切断する。



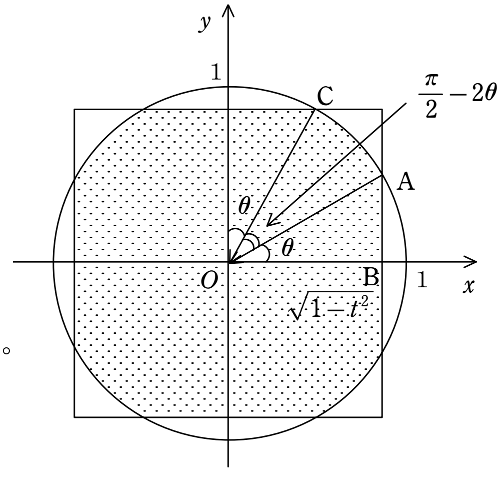
切断面は $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 & \cdots ① \\ |y| \leqq \sqrt{1-t^2},\ |x| \leqq \sqrt{1-t^2} & \cdots ② \end{cases}$ を満たす領域であるが

②の正方形が①にすべて含まれるとき

$x=y=\sqrt{1-t^2}$ が①を満たし，$2-2t^2 \leqq 1 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq t \leqq 1$ である。

このとき，断面積 $S(t)$ は $S(t)=4(1-t^2)$ より，この部分の体積 V_1 は

$$V_1=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} S(t)\,dt = 4\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{8}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{3}$$



また，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，

図は　$z=t$　での断面を xy 平面に射影したもので

図のように　$\angle \mathrm{AOB}=\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$　として断面積を定量する。

$\mathrm{OA}=1,\ \mathrm{OB}=\cos\theta,\ \mathrm{AB}=\sin\theta$　であり，

$\mathrm{OB}=\sqrt{1-t^2}=\cos\theta$　から　$t=\sin\theta$　であり，２つの三角形と１つのおうぎ形の面積から

$$S(t)=4\left\{2\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}=4\cos\theta\sin\theta+\pi-4\theta$$

よって，この部分の体積V_2は

$$V_2=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(t)\frac{dt}{d\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(t)\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{4\cos^2\theta\sin\theta+(\pi-4\theta)\cos\theta\right\}d\theta$$

$$=\left[-\frac{4}{3}\cos^3\theta+(\pi-4\theta)\sin\theta-4\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{16}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{3}$$

となる。

以上より，求める体積Vは

$$V=2\left(V_1+V_2\right)=2\left\{\left(\frac{8}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)+\left(\frac{16}{3}-\frac{7\sqrt{2}}{3}\right)\right\}=16-8\sqrt{2}$$