ε - δ

高校数学では，数列にしても関数にしても極限の取り扱いは直感的に扱うことになっています。これはこれで理解しやすいでしょうし，数学の専門家になるわけでもない人々には程よいと思われます。

高校の検定教科書では数列の極限値について

> 無限数列$\{x_n\}$において，項の番号nを限りなく大きくするとき，
> x_nが一定の値aに限りなく近づく場合$\{x_n\}$はaに**収束する**　または　$\{x_n\}$の**極限**はaである
> といい，記号で次のように書き表す。
>
> $$n \to \infty \text{のとき} x_n \to a \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$
>
> また，このときaを数列$\{x_n\}$の極限値という。
> 数列$\{x_n\}$が収束しないとき，$\{x_n\}$は**発散する**という。

と定義していますが,「限りなく近づく」ということについてどういうことなのかを述べていません。

関数の極限値についても同じように

> 関数$f(x)$において，xがaと異なる値をとりながら，aに限りなく近づくとき，
> $f(x)$のとる値が一定の値bに限りなく近づく場合，$x \to a$のとき$f(x)$はbに**収束する**，
> または$x \to a$のときの$f(x)$の**極限値**はbであるといい，記号で次のように書き表す。
>
> $$x \to a \text{のとき} f(x) \to b \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b$$
>
> 発散については
> xがaと異なる値をとりながら，aに限りなく近づくとき，それに応じて、
> $f(x)$の値が限りなく大きくなる場合
> $x \to a$のとき$f(x)$は**正の無限大に発散する**
> または　$x \to a$のときの$f(x)$の**極限は正の無限大である**
> といい，記号で次のように書き表す。
>
> $$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to +\infty \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$
>
> また，xがaと異なる値をとりながら，aに限りなく近づくとき，
> $f(x)$の値が負で，その絶対値が限りなく大きくなる場合
> $x \to a$のとき$f(x)$は**負の無限大に発散する**
> または　$x \to a$のときの$f(x)$の**極限は負の無限大である**
> といい，記号で次のように書き表す。
>
> $$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to -\infty \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

と定義するだけで、「限りなく近づく」ことの意味は直感に任されているようです。ところが，大学での微分積分学となると，このような定義では不十分であるとばかりに，次のような定義が登場します。

まず，数列の極限について

> 数列$\{x_n\}$において，任意の正の数εに対して、適当な番号Nを決めると、
>
> $n > N$となるすべてのnについて$|x_n - a| < \varepsilon$
>
> となるならば，これを
>
> $$n \to \infty \text{ のとき } x_n \to a \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$
>
> という記号で表し，この場合，数列$\{x_n\}$はaに収束するという。
>
> また，aを数列$\{x_n\}$の極限値という。

と定義され，関数の極限については

> aの近くで定義された関数$f(x)$において，
>
> 任意の正の数εに対して、適当な正の数δを決めると，
>
> $0 < |x - a| < \delta$となるすべてのxについて$|f(x) - b| < \varepsilon$
>
> となるならば，これを
>
> $$x \to a \text{のとき} f(x) \to b \quad \text{または} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b$$
>
> という記号で表し，この場合，$x \to a$のとき$f(x)$はbに収束するという。
>
> また，bを$x \to a$のときの$f(x)$の極限値という。

と定義されます。ここで，文字の説明をしておくと，文中のεは「イプシロン」、δは「デルタ」と読むギリシア文字で，極限のことを議論する際に数学ではよく使われる文字です。この文字をとって上記のような極限に関する論法を「$\varepsilon - \delta$論法」と呼びます。

微分積分学をきちんと学ぼうとするとき，まず最初にぶつかる壁が$\varepsilon - \delta$論法で，これが数学の評判を悪くする原因の１つのようです。

数列$\{a_n\}$が $a_n = \dfrac{1}{n}$ と表されているとき，

この数列を初項から順に列挙すると $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots\cdots$ となります。

この数列の極限が0であることは，分母が大きくなっていくことから直感的に理解できます。

また，数列$\{b_n\}$が $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ と表されているとき，

この数列を初項から順に列挙すると $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \cdots\cdots$となります。

この数列の極限が0であることも直感的に理解できるでしょう。

例に挙げた２つの数列ですが，$\{a_n\}$ も $\{b_n\}$ もともに極限が 0 であるということは同じです。

しかし，0 に「近づく速さ」を考えると，その速さは随分違います。

例えば，数列の値が $\dfrac{1}{10000}$ になるのは何番目かを比べてみると，

a_n では第 10000 項目ですが、b_n では第 100 項目であり，

数列の値が $\dfrac{1}{100000000000000000000}$ になるのは

a_n では第 100000000000000000000 項目ですが，b_n では第 10000000000 項目であり，

$\{b_n\}$ の方が $\{a_n\}$ よりも速く 0 に近づきます。この「近づく速さ」を伝えようとするとき，どうしても高校までの定義では正確には表現できません。そこで、大学での新たな定義が必要になるのです。

大学での定義を噛み砕いてみましょう。

「数列 $\{x_n\}$ において，任意の正の数 ε に対して，適当な番号 N を決めると，

$n > N$ となるすべての n について $|x_n - a| < \varepsilon$ となる」

となっていますが，これは番号 n が大きくなれば，x_n と a の差（$x_n - a$）が ε より小さくなるということです。$x_n - a$ に絶対値がついているのにも意味があり，これは x_n が a に近づくとき、数直線上での近づき方には「右から」と「左から」，さらには「右や左をうろちょろしながら」の近づき方がありますが，どんな近づき方でもよいということを言っています。

そして，ε より小さくなると言っていますが，その ε は任意の正の数，つまりどんな正の数でもいいと言っているのですから，ものすごく小さな数でもいいということです。ほとんど 0 であるような小さな ε を意識してもらえば，x_n と a の差がもはやほとんどない状態であることになります。

これが，ある番号（N）から先にある項のすべてで起こっている，このことが x_n が a に収束するということになるのです。大事なのは先に ε が決まり，その ε に対して番号 N が決められるということです。

ε がどんな無茶な要求（ものすごく小さい数）をしてきても，番号 N を適切に（大きく）選びさえすれば，x_n と a の差をその ε より小さくできるということ，これが「限りなく近づく」ということをとてもうまく正確に表現するための方法なのです。ここまでの論法は $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれます。

次の問題を考えます。

【問題】$\lim_{n\to\infty} a_n = a$　のとき　$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} = a$　であることを証明せよ。

これは，いざ証明しようとすると説明するのがなかなか難しい問題ですが，

$\varepsilon - N$ 論法によって次のように証明されます。

〔証明〕

任意の$\varepsilon > 0$をとる。

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$　であるから，ある正の整数m, Nが存在し，$m > N$のとき　$|a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$　…①　となる。

ここで，$\left| \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} - \alpha \right| = \left| \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} - \frac{n\alpha}{n} \right|$

$$= \left| \frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots\cdots+(a_n-\alpha)}{n} \right|$$

$$\leqq \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_N-\alpha|+\cdots+|a_{N+1}-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n}$$

$$= \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_N-\alpha|}{n} + \frac{|a_{N+1}-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n}$$

$$< \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_N-\alpha|}{n} + \frac{\overbrace{\frac{\varepsilon}{2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2}}^{n-N\text{個}}}{n}$$

$$= \frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_N-\alpha|}{n} + \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

ここで，$\frac{|a_1-\alpha|+|a_2-\alpha|+\cdots+|a_N-\alpha|}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$　…②　を満たすN_1（$N_1 \geqq N$）をとれば，

①，②より　$n \geqq N_1$を満たすすべてのnに対して　$\left| \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

となる。

したがって，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} = a$　であることが示された。　〔証明終〕

関数の「連続性」の定義についても$\varepsilon - \delta$論法が登場します。

$f(x)$はaおよびその近くで定義されているとする。

任意の正の数εに対して、適当な正の数δを決めると、

$|x-a| < \delta$　となるすべてのxについて　$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$

となるならば，$f(x)$は$x=a$で連続であるという。