自然対数の底 e について

高校数学において「自然対数の底」と呼ばれる新しい数が登場します。これは $2.718281828459045\cdots$ と永遠に続く数であり，循環小数ではないので，有理数ではありません。このような数のことを超越数といいますが，高校生にとっては「π」以来の超越数でしょう。

実はこの数，数学の世界に限らず様々な場面に登場する重要な定数なのです。この定数がどのようにして得られるか，いろいろな定義があります。

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}},\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

これらはいずれも $e=2.71\cdots$ に収束します。

また，指数関数 $y=a^x$ に対し，微分したときに変わらないような指数関数 $y=e^x$ の底として定数 e を定義することもあります。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ が同じ値に収束することを式変形を使って説明し，さらにこの e が３より小さいことを示します。この証明は大学入試でもよく見ますが，不等式の扱いについて中学生・高校生はとても苦手ですので，そのエッセンスを感じてもらえればと思います。

＜$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ であること＞

$\displaystyle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を２項展開すると

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot 1^k\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot\frac{1}{n^{n-k}}\\&={}_n\mathrm{C}_0\cdot\frac{1}{n^n}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{n^{n-2}}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-2}\cdot\frac{1}{n^2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{n^0}\\&={}_n\mathrm{C}_n\cdot\frac{1}{n^0}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot\frac{1}{n}+{}_n\mathrm{C}_{n-2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_2\cdot\frac{1}{n^{n-2}}+{}_n\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+{}_n\mathrm{C}_0\cdot\frac{1}{n^n}\quad\cdots（＊）\end{aligned}$$

ここで，${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ であるから

（＊）$$=1+n\times\frac{1}{n}+\frac{n!}{(n-2)!\{n-(n-2)\}!}\times\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n!}{2!(n-2)!}\times\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{n!}{1!(n-1)!}\times\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n!}{0!n!}\times\frac{1}{n^n}$$

$$=1+n\times\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots\cdots4\cdot3}{(n-2)!}\times\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{n(n-1)\cdots\cdots3\cdot2}{(n-1)!}\times\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n!}{n!}\times\frac{1}{n^n}$$

$$=1+n\times\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}\times\frac{n(n-1)}{1}\times\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\times\frac{n(n-1)\cdots\cdots4\cdot3}{1}\times\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{1}{(n-1)!}\times\frac{n(n-1)\cdots\cdots3\cdot2}{1}\times\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n!}{n!}\times\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\times\frac{n-1}{n}+\cdots+\left\{\frac{1}{(n-2)!}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{3}{n}\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{(n-1)!}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{2}{n}\right\}+\left\{\frac{1}{n!}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{1}{n}\right\}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-2)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-3}{n}\right)\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{(n-1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\right\}+\left\{\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

右辺の各項の先頭に注目すると、$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots\cdots$ の各数が現れています。

$n\to\infty$ とすれば、$\dfrac{1}{n!}$ の後ろの因子がそれぞれ 1 に収束することから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$ であることが示されました。

＜e が３より小さいこと＞

$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ は $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)>1$ より n に関して単調増加であり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$