完全順列／モンモール数

【問題】

場所 1 から場所nに異なるn個のものが並んでいる。これらを並べ替えてどれもが元の位置にならないようにする方法の総数をa_nとする。ただし，$n≧2$とする。

(1) $n=4$の場合の並べ方をすべて書き出して，a_4を求めよ。

(2) $n≧4$に対して $a_n=(n-1)(a_{n-2}+a_{n-1})$ を証明せよ。

【解答・解説】

(1) 異なるn個のものを $1, 2, \cdots, n$ で表し，はじめの並び方を $(1, 2, \cdots, n)$ とする。

$n=4$のとき，題意の並べ方について

一番左に 2 があるものは $(2, 1, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3)$,

3 があるものは $(3, 1, 4, 2), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1)$,

4 があるものは $(4, 1, 2, 3), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1)$

であるから $a_4=9$

(2) 1 番目にkという数字があるとする。…（＊）

このとき，k番目$(2≦k≦n)$が 1 になっているか，そうでないかで場合分けをして考える。

（ⅰ）k番目が 1 であるとき

1 番目がk，k番目が 1 なので，1 番目とk番目の置換が起きており，

その 2 ヶ所以外の$n-2$ヶ所に並ぶものは 2，3，…，$k-1$，$k+1$，…，n である。

これらの数字は何番目かという数字と同じものがそのまま残っているので，

$n-2$個のどれもが元の位置にならないようにする方法の総数なので a_{n-2} 通りある。

（ⅱ）k番目が 1 でないとき

あるh番目が 1 であるとすると

1 番目,	2 番目,	…,	h番目,	…,	k番目,	…,	n番目
k,	□,	…,	1,	…,	○,	…,	△

というように並んでいる。

この場合，1 番目とk番目以外の$n-2$ヶ所の入るものと何番目かという数字は，すべては一致していないので並び替えの総数は a_{n-2} とはならない。

そこで，（kという数を含む）2 からnまでの数を 2 番目からn番目までの位置にどれもが元の位置にならないように並び替え，kという数があるところを 1 に置き換える。これでk番目は 1 ではなく，1 からnまでの数がどれもが元の位置にならないように並ぶことになる。kという数があるところを 1 に置き換える操作は 1 通りであるから，この並べ方の総数は a_{n-1} 通りある。

（∗)より（ⅰ)，(ⅱ)はそれぞれ $n-1$ 通りずつあるので

$$a_n=(n-1)(a_{n-2}+a_{n-1})$$

が成り立つ。

■漸化式を解く■

(2)で得られた漸化式は $a_0=1,\ a_1=0$ とすれば $n \geqq 2$ で成り立つ。

$a_n=(n-1)(a_{n-2}+a_{n-1})$ の両辺を$n!$で割って

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{(n-1)a_{n-1}}{n!}+\frac{(n-1)a_{n-2}}{n!}$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}$$

$\dfrac{a_n}{n!}=b_n$ とおくと $b_n=\dfrac{n-1}{n}b_{n-1}+\dfrac{1}{n}b_{n-2}$ …①

①を変形すると $b_n-b_{n-1}=-\dfrac{1}{n}\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right)$

ここで，$b_0=\dfrac{a_0}{0!}=1,\ b_1=\dfrac{a_1}{1!}=0$ であるから

$n \geqq 2$ に対して

$$b_n-b_{n-1}=-\frac{1}{n}\left(b_{n-1}-b_{n-2}\right)=(-1)^2\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\left(b_{n-2}-b_{n-3}\right)=\cdots$$
$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(b_1-b_0\right)=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\cdots\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{(-1)^n}{n!}$$

よって $b_n-b_1=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ より $b_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ を得る。

したがって $a_n=n!b_n=n!\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ となり，これが完全順列の一般項である。

■完全順列とモンモール数■

この問題のように，順列の中でもとの並び方と１つも同じ位置に並んでいない順列を完全順列といい，

その総数をフランスの数学者モンモール（1678～1719 年）の名をとってモンモール数という。

■ $\dfrac{a_n}{n!}$ の極限■

$\dfrac{(-1)^0}{0!}=1,\ \dfrac{(-1)^1}{1!}=-1$ なので $a_n=n!\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}=n!\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ と表せる。

e^x のテイラー展開より $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n!}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ となる。