瞬間部分積分

部分積分を繰り返し利用するような問題で知っていると少し便利な技です。

$F'(x)=f(x)$ とすると

部分積分は $\int f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)-\int F(x)g'(x)\,dx$ と表されますが，

これを繰り返し利用すれば次のような形になります。

簡単のため，$f(x)\to f$，　$g(x)\to g$，　$\int\quad dx\to\int$　などと省略して表し，

f の n 階積分を $f^{<n>}$，g の n 階微分を $g^{(n)}$ と表すものとします。

＜瞬間部分積分＞

$$\int f\,g=f^{<1>}g-f^{<2>}g^{(1)}+f^{<3>}g^{(2)}-f^{<4>}g^{(3)}+\cdots\cdots$$

符号を変えながら f については１回ずつ積分，g については１回ずつ微分していきます。

公式的には，限りなく続いていくように見えますが，実際は関数 g が簡単な多項式の関数ならば，途中で０になってしまうので有限になります。f は積分していくので，簡単に積分できる関数である $e^x,\ e^{-x},\ e^{ax}$ などが適しています。具体的な例で使い方を確認してみます。C は積分定数です。

(1) $\int x^2e^x\,dx=\int e^xx^2\,dx$　（$f(x)=e^x$，$g(x)=x^2$　と考えて）

$$=e^xx^2-e^x(2x)+e^x(2)+C$$

$$=e^x(x^2-2x+2)+C$$

(2) $\int x^4e^x\,dx=\int e^xx^4\,dx$　（$f(x)=e^x$，$g(x)=x^4$　と考えて）

$$=e^xx^4-e^x(4x^3)+e^x(12x^2)-e^x(24x)+e^x(24)+C$$

$$=e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+C$$

(3) $\int x^3e^{-x}\,dx=\int e^{-x}x^3\,dx$　（$f(x)=e^{-x}$，$g(x)=x^3$　と考えて）

$$=-e^{-x}x^3-e^{-x}(3x^2)-e^{-x}(6x)-e^{-x}(6)+C$$

$$=-e^{-x}\left(x^3+3x^2+6x+6\right)+C$$

（4）$\int (x^3+2x)e^x\,dx = \int e^x(x^3+2x)\,dx$　（$f(x)=e^x$，$g(x)=x^3+2x$ と考えて）

$$= e^x(x^3+2x) - e^x(3x^2+2) + e^x(6x) - e^x(6) + C$$

$$= e^x\left(x^3+2x-3x^2-2+6x-6\right)+C$$

$$= e^x\left(x^3-3x^2+8x-8\right)+C$$

（5）$\int x^3e^{3x}\,dx = \int e^{3x}x^3\,dx$　（$f(x)=e^{3x}$，$g(x)=x^3$ と考えて）

$$= \frac{e^{3x}}{3}x^3 - \frac{e^{3x}}{3^2}(3x^2) + \frac{e^{3x}}{3^3}(6x) - \frac{e^{3x}}{3^4}(6) + C$$

$$= e^{3x}\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}\right)+C$$

これらを眺めていると，最終形が積分定数の C を除いて，必ず $f(x)$ でくくり出せることがわかります。

よって，次のような公式として覚えても使いやすいでしょう。

$$\int e^x g = e^x\left(g - g^{(1)} + g^{(2)} - g^{(3)} + \cdots\cdots\right) + C$$

$$\int e^{-x} g = -e^{-x}\left(g + g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} + \cdots\cdots\right) + C$$

$$\int e^{ax} g = e^x\left(\frac{1}{a}g - \frac{1}{a^2}g^{(1)} + \frac{1}{a^3}g^{(2)} - \frac{1}{a^4}g^{(3)} + \cdots\cdots\right) + C$$