ベータ関数（特殊値）

積分計算でよく登場する $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ について，公式を導く。

$B(m,n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ とおくと，部分積分によって

$$B(m,n)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\right\}'(x-\beta)^n dx$$

$$=\left[\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^n\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{m+1}(x-\alpha)^{m+1}\cdot n(x-\beta)^{n-1}\ dx$$

$$=-\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}dx$$

よって $B(m,\ n)=-\dfrac{n}{m+1}B(m+1,\ n-1)$ となる。

これを繰り返し用いると

$$B(m,\ n)=-\frac{n}{m+1}\left(-\frac{n-1}{m+2}B(m+2,\ n-2)\right)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=(-1)^n\frac{n(n-1)\cdots\cdots 1}{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n)}B(m+n,\ 0)$$

$$=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+n}dx$$

$$=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}\left[\frac{1}{m+n+1}(x-\alpha)^{m+n+1}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot\frac{1}{m+n+1}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

$$=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が得られる。

これは大学で学ぶベータ関数の特殊な場合になっている。