Cauchy-Schwarz の不等式

Cauchy-Schwarz（コーシー＝シュワルツ）の不等式

$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ を実数とするとき，次の不等式が成り立つ。

$$\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2\right)\geqq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

等号成立は $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\cdots=\dfrac{b_n}{a_n}$（$a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$）のとき

（単に「シュワルツの不等式」，「シュヴァルツの不等式」などとも呼ばれています）

特に，$n=2$ の場合は $\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)\geqq\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$

$n=3$ の場合は $\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)\geqq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$ となりますが，

高校数学としては，ベクトルの内積と関連付けると理解しやすいと思います。つまり，

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\geqq|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\cos^2\theta=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2$

であり，これを成分で表せば $\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2\right)\geqq\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2$ が得られます。

等号成立は $\cos\theta=\pm1$ のときなので，

$\left(a_1,\ a_2,\ a_3\right)\ /\!/\ \left(b_1,\ b_2,\ b_3\right)$ となる，すなわち $\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}=\dfrac{b_3}{a_3}$ となるときです。

〔導き方〕（$n=2$ の場合だと）

方程式$\left(a_1x-b_1\right)^2+\left(a_2x-b_2\right)^2=0\cdots$（＊）（$a_1\neq0,\ a_2\neq0$，$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ は実数）を考える。

方程式の左辺を展開して x について整理すると $\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2\right)x+\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)=0$

この方程式の左辺は（＊）の式から任意の実数 x に対して 0 以上なので，判別式をとれば 0 以下になるから

$$\frac{D}{4}=\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2-\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)\leqq0$$

したがって $\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right)\geqq\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2$ を得る。

等号成立は（＊）から $x=\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{b_2}{a_2}$ となるとき。

$n\geqq3$ についても、$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2=0$ という２次方程式を考えれば同様です。

Cauchy-Schwarz の不等式を利用できる問題を挙げていきます。利用できる形であることに気づくのに訓練が必要かもしれません。

【例題１】 $3\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2\right) \geqq \left(a_1+a_2+a_3\right)^2$ を証明せよ。$a_1,\ a_2,\ a_3$ は実数とする。

〔解答〕 $n=3$ のときの Cauchy-Schwarz の不等式において，$b_1=b_2=b_3=1$ とすれば得られる。

【例題２】 $a_1, \cdots, a_n>0$ のとき、$\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n) \geqq n^2$ を証明せよ。

〔解答〕Cauchy-Schwarz の不等式ににおいて

$a_1 \to \dfrac{1}{\sqrt{a_1}},\ a_2 \to \dfrac{1}{\sqrt{a_2}},\ \cdots, a_n \to \dfrac{1}{\sqrt{a_n}},\ b_1 \to \sqrt{a_1},\ b_2 \to \sqrt{a_2},\ \cdots,\ b_n \to \sqrt{a_n}$ とすれば得られる。

【例題３】正の実数 a,b,c が $a+2b+3c=3$ を満たすとき、$\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}$ の最大値を求めよ。

〔解答〕Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left\{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{2b}\right)^2+\left(\sqrt{3c}\right)^2\right\} \geqq \left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}\right)^2$$ が成り立つ。

よって $3(a+2b+3c) \geqq \left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c}\right)^2$

$$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{2b}+\sqrt{3c} \leqq \sqrt{3(a+2b+3c)}=\sqrt{3\cdot 3}=3$$

等号成立は $\sqrt{a}=\sqrt{2b}=\sqrt{3c}$ つまり $a=1,\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{1}{3}$ のときに成立。よって最大値は3

【例題４】正の実数 a,b,c が $a+4b+9c=1$ を満たすとき、$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ の最小値を求めよ。

〔解答〕Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left\{\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(2\sqrt{b}\right)^2+\left(3\sqrt{c}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right\} \geqq \left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+2\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+3\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$$

$$=(1+2+3)^2=36$$

よって $(a+4b+9c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqq 36$ となるので， $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqq 36$ が成り立つ。

等号成立は $\sqrt{a}:\dfrac{1}{\sqrt{a}}=2\sqrt{b}:\dfrac{1}{\sqrt{b}}=3\sqrt{c}:\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ かつ $a+4b+9c=1$ のときより $a=\dfrac{1}{6},b=\dfrac{1}{12},c=\dfrac{1}{18}$

よって 最小値は 36

【例題５】任意の正の実数 x,y に対して $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

〔解答〕Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1^2\right\}\left\{\left(\sqrt{2x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2\right\}\geqq\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$$

両辺は共に正なので、平方根をとって $\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{2x+y}\geqq\sqrt{x}+\sqrt{y}$ …①

等号成立は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}:\sqrt{2x}=1:\sqrt{y}$ のときで、 $y=4x$ のとき。

よって求める k の最小値は $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

【例題６】 x,y を実数とするとき、 $\dfrac{5x+3y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ の最大値を求めよ。

〔解答〕最大値をとる x,y は明らかに正であるから、 $x>0,y>0$ として考える。

Cauchy-Schwarz の不等式より $(5^2+3^2+1^2)(x^2+y^2+1^2)\geqq(5x+3y+1)^2$

等号成立は $x=5,\ y=3$ のとき。

よって $\dfrac{(5x+3y+1)^2}{x^2+y^2+1^2}\leqq 35$ が成り立ち， $\dfrac{5x+3y+1}{\sqrt{x^2+y^2+1^2}}\leqq\sqrt{35}$ となるから最大値は $\sqrt{35}$

【例題７】任意の正の実数 x, y, z に対して $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \leqq k\sqrt{x+y+z}$ が成立するような定数 k の最小値を求めよ。

〔解答〕Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left(1^2+1^2+1^2\right)\left\{\left(\sqrt{x+y}\right)^2+\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{z+x}\right)^2\right\} \geqq \left(1\cdot\sqrt{x+y}+1\cdot\sqrt{y+z}+1\cdot\sqrt{z+x}\right)^2$$

よって $\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2 \leqq 6(x+y+z)$

したがって $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \leqq \sqrt{6}\cdot\sqrt{x+y+z}$

等号成立は $x=y=z$ のとき。

よって k の最小値は $\sqrt{6}$

【例題８】実数 x, y, z, u, v が $x+y+z+u+v=8,\ x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=16$ を満たすとき，x のとりうる値の最大値を求めよ。

〔解答〕 $y+z+u+v=8-x$ …①， $y^2+z^2+u^2+v^2=16-x^2$ …②であり，

Cauchy-Schwarz の不等式より $\left(1^2+1^2+1^2+1^2\right)\left(y^2+z^2+u^2+v^2\right) \geqq \left(y+z+u+v\right)^2$ …③

等号成立は $y=z=u=v$ のとき。

③に①，②を代入して $4(16-x^2) \geqq (8-x)^2 \iff 5x^2-16x \leqq 0$

$$0 \leqq x \leqq \frac{16}{5}$$

したがって，x のとりうる値の最大値は $y=z=u=v=\dfrac{6}{5}$ のとき $\dfrac{16}{5}$

【例題９】正の実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ を満たすとき，

$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}$ の取りうる値の最大値を求めよ。

〔解答〕Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\left(1^2+1^2+\cdots+1^2\right)\left(\sqrt{x_1}^2+\sqrt{x_2}^2+\cdots+\sqrt{x_n}^2\right) \geqq \left(1\cdot\sqrt{x_1}+1\cdot\sqrt{x_2}+\cdots+1\cdot\sqrt{x_n}\right)^2$$

$$n\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right) \geqq \left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\right)^2$$

等号成立は $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のとき。

よって $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \leqq \sqrt{n\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)}=\sqrt{n}$

したがって求める最大値は，$x_1=x_2=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ のとき $\sqrt{n}$

【例題１０】いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。

このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $\mathrm{P}\geqq\dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4}\geqq\mathrm{Q}\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{P}$ であることを示せ。

(1) k の目が出る確率を p_k とおくと

$p_k\geqq 0\ (1\leqq k\leqq 6)$， $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ …①であり，

$\mathrm{P}=p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2$ である。

Cauchy-Schwarz の不等式より

$$(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2+p_4{}^2+p_5{}^2+p_6{}^2)$$

$$\geqq(1\cdot p_1+1\cdot p_2+1\cdot p_3+1\cdot p_4+1\cdot p_5+1\cdot p_6)=1$$

が成り立つので $6\mathrm{P}\geqq 1$ したがって $\mathrm{P}\geqq\dfrac{1}{6}$ である。

等号成立は $1:1:\cdots:1=p_1:p_2:\cdots:p_6$ のときであり，①より $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\dfrac{1}{6}$ のとき。

(2) $u=p_1+p_3+p_5$, $v=p_2+p_4+p_6$ とおくと $\mathrm{Q}=uv$ …② である。

(ⅰ)〔 $\frac{1}{4}\geqq \mathrm{Q}$ であること 〕

相加平均・相乗平均の関係式より $\frac{u+v}{2}\geqq\sqrt{uv}$

$u+v=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6$ であり，①，②から $\frac{1}{2}\geqq\sqrt{\mathrm{Q}}$

したがって $\frac{1}{4}\geqq\mathrm{Q}$ が成り立つ。

等号成立は，$u=v$ すなわち $p_1+p_3+p_5=p_2+p_4+p_6=\frac{1}{2}$ のとき。

(ⅱ)〔 $\mathrm{Q}\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{P}$ であること〕

Cauchy-Schwarz の不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)({p_1}^2+{p_3}^2+{p_5}^2)\geqq(1\cdot p_1+1\cdot p_3+1\cdot p_5)^2$$

$$3({p_1}^2+{p_3}^2+{p_5}^2)\geqq u^2 \quad \cdots③$$

同様にして $(1^2+1^2+1^2)({p_2}^2+{p_4}^2+{p_6}^2)\geqq(1\cdot p_2+1\cdot p_4+1\cdot p_6)^2$

$$3({p_2}^2+{p_4}^2+{p_6}^2)\geqq v^2 \quad \cdots④$$

③，④を辺々加えて $3({p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2)\geqq u^2+v^2$

$$3\mathrm{P}\geqq u^2+v^2$$

ここで，$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$

$=1-2\mathrm{Q}$ であるから

$3\mathrm{P}\geqq1-2\mathrm{Q}$ すなわち $\mathrm{Q}\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{P}$ が成り立つ。

等号成立は，③と④の等号成立を考えて $p_1=p_3=p_5$ かつ $p_2=p_4=p_6$ のとき。

(ⅰ)，(ⅱ)より $\frac{1}{4}\geqq\mathrm{Q}\geqq\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{P}$

Cauchy-Schwarz（コーシー＝シュワルツ）の不等式をΣ記号を使って表すと次のようになります。

実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ に対して $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k{}^2\right) \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$ が成り立つ。

等号成立は $a_1 : a_2 : \cdots : a_n = b_1 : b_2 : \cdots : b_n$ のときに限る。

最後に，Cauchy-Schwarz の不等式に関連して，有名なラグランジュの恒等式を紹介しておきます。

★ ラグランジュの恒等式

$$\left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right)^2 + \sum_{i<j}\left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$$

（$\sum_{i<j}$ は $1 \leqq i < j \leqq n$ なるすべての組 $(i,\ j)$ についての和）

例えば $n=2$ のときは $\left(a_1{}^2 + a_2{}^2\right)\left(b_1{}^2 + b_2{}^2\right) = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2$ となります。