Stirling の公式

Wallis の公式を利用して，Stirling の公式：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!}=1$ を証明します。

この公式により $n!$ が $\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ で近似できることがわかります。

【補題１】

関数 $f(x)$ は区間$[a,b]$で２回微分可能で， $f''(x)$ は連続であるとする。このとき，

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}(b-a)=-\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)dx$$

が成り立つ。

［証明］証明すべき式の右辺について，部分積分を２回して

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)dx&=-\frac{1}{2}\left\{\Big[f'(x)(x-a)(b-x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)\cdot\{-2x+(a+b)\}dx\right\}\\&=-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)\cdot\{2x-(a+b)\}dx\\&=-\frac{1}{2}\left\{\Big[f(x)\cdot\{2x-(a+b)\}\Big]_a^b-\int_a^b f(x)\cdot 2dx\right\}\\&=-\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}(b-a)+\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

（証明終）

【補題１】の左辺は，「定積分$\int_a^b f(x)dx$と台形の面積$\frac{1}{2}\{f(a)+f(b)\}(b-a)$の差」なので，この定理の主張は，それが$-\frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(b-x)dx$になるということです。

【補題１】を区間$[a,b]$をn等分した各小区間に適用して和を求めると，次の【補題２】が得られます。

【補題２】

関数 $f(x)$ は区間$[a,b]$で２回微分可能で， $f''(x)$ は連続であるとする。さらに区間$[a,b]$において

$|f''(x)|\leqq M$ （M は定数）とする。

このとき，区間$[a,b]$をn等分する分点を $x_k=a+k\dfrac{b-a}{n}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ として，

$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\{f(x_{k-1})+f(x_k)\}\frac{b-a}{n}$ とおくと，$\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx-T_n\right|\leqq\dfrac{M(b-a)^3}{12n^2}$ が成り立つ。

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{\int_a^b f(x)dx-T_n\right\}=0$ が成り立つ。

［証明］$h=\dfrac{b-a}{n}$ とおくと、

$$\left|\int_a^b f(x)dx-T_n\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\frac{1}{2}\{f(x_{k-1})+f(x_k)\}h\right]\right|$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx-\frac{1}{2}\{f(x_{k-1})+f(x_k)\}h\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left|-\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(x)(x-x_{k-1})(x_k-x)\,dx\right|$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f''(x)(x-x_{k-1})(x_k-x)|\,dx$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{x_{k-1}}^{x_k}M(x-x_{k-1})(x_k-x)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{M}{2}\cdot\frac{(x_k-x_{k-1})^3}{6}=\sum_{k=1}^{n}\frac{Mh^3}{12}=n\frac{Mh^3}{12}=\frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$ となる。　（証明終）

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left|\int_a^b f(x)dx-T_n\right|\leqq\lim_{n\to\infty}\frac{M(b-a)^3}{12n}=0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left\{\int_a^b f(x)dx-T_n\right\}=0$ を得る。

【補題２】の T_n は，$\displaystyle T_n=\left\{\frac{1}{2}f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+\frac{1}{2}f(b)\right\}\frac{b-a}{n}=\left\{\sum_{k=0}^{n}f(x_k)-\frac{1}{2}f(a)-\frac{1}{2}f(b)\right\}\frac{b-a}{n}$

とも表せる。（$\because f(x_0)=f(a),\ f(x_n)=f(b)$）

次に，次に Stirling の公式を証明します。

関数 $f(x)=\log x$，区間$[1, 2]$に対して【補題２】を適用する。

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ であり，$M=1$ として

$$\int_1^2\log x\,dx=\left[x\log x-x\right]_1^2=2\log 2-1=\log\frac{2^2}{e}$$

$$T_n=\left\{\sum_{k=0}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}\log 2\right\}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{\sqrt{2}n^n}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{\sqrt{2}n^n n!}$$

より $n\left(\int_1^2 \log x\,dx - T_n\right) = \log\left(\frac{2^2}{e}\right)^n \frac{\sqrt{2}n^n n!}{(2n)!} = \log\frac{\sqrt{2}2^{2n}n^n e^{-n} n!}{(2n)!}$ となるから，

【補題２】より $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}2^{2n}n^n e^{-n} n!}{(2n)!} = 1$ …①が得られる。

ここで，Wallis 公式より $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$ …②であり、$\frac{①}{②}\times\sqrt{\pi}$ を計算すると

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{n!} = 1$ となり，Stirling の公式を得る。

［研究］

最後に，$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ と $n!$ の様子をグラフで表してみます。

$y = \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$ としてグラフを描いたものと，

$x = 1, 2, 3, \cdots$ として $y = x!$ を離散的にプロットしたものを

一緒に描くと右図のようになります。