Wallis の公式の応用

Wallis の公式を証明する中で得られた式を利用して，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ という積分結果を導きます。

この積分に含まれる∞の意味は $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx$ という意味です。

この積分に表れる関数 $f(x)=e^{-x^2}$ は、その原始関数を「初等的な関数では表せない」ことが知られていますので，この結果は深い結果なのです。

Wallis の公式を導くのに利用した式をここにまた用意しておきます。

$\displaystyle S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$ に対し，n が奇数ならば $\displaystyle S_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\cdots\frac{2}{3}\cdot 1$ でした。

すなわち，$n=2m+1$として $\displaystyle S_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\cdots\frac{2}{3}$ …① が成り立ちます。

また，Wallis の公式を導く過程で $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 4\cdots\cdots 2m}{3\cdot 5\cdots\cdots(2m-1)\cdot\sqrt{2m+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ …② を得ました。

さて，①と②より $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sqrt{2m+1}\ S_{2m+1}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ であり、$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sqrt{m}\ S_{2m+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ …（＊）となります。

（$\displaystyle\because\lim_{m\to\infty}\frac{\sqrt{2m+1}}{\sqrt{2}}=\lim_{m\to\infty}\sqrt{m}$）

ここでまず，積分 $\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^m dt$ を $t=\cos x$ と置換して積分すると

$$\int_0^1(1-t^2)^m dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-\cos x^2)^m(-\sin x)dx$$

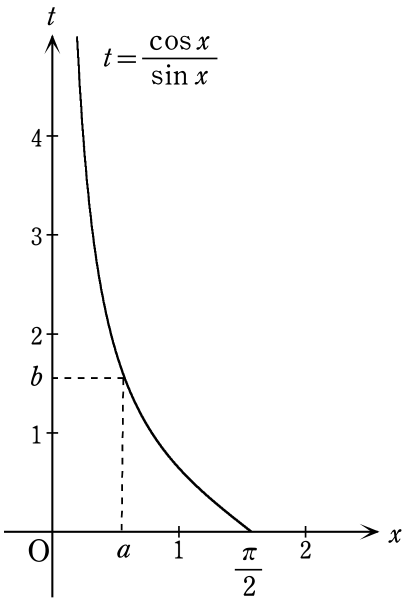
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-\sin^{2m+1}x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx=S_{2m+1}\quad\cdots③$$ となる。

また，積分 $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{(1+t^2)^m}dt$ を $\displaystyle t=\frac{\cos x}{\sin x}$ と置換して積分すると

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{1}{(1+t^2)^m}dt=\lim_{a\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}}^a\frac{1}{\left\{1+\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2\right\}^m}\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\lim_{a\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}}^a\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\right)^m\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right)dx$$



$$=\lim_{a\to 0}\int_a^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-2}x\,dx$$

よって $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^m}dt=S_{2m-2}$ …④ となることがわかる。

さて次に，$e^x \geqq 1+x$ …⑤（等号成立は $x=0$ のとき）を利用します。

⑤において $x=-t^2$ とすれば $1-t^2 \leqq e^{-t^2}$（等号成立は $t=0$ のとき）となり，$0\leqq t\leqq 1$ においては $1-t^2\geqq 0$

であるから，$(1-t^2)^m \leqq (e^{-t^2})^m=e^{-mt^2}$ （$0\leqq t\leqq 1$）が成り立ち，これより

$\displaystyle\int_0^1(1-t^2)^m dt<\int_0^1 e^{-mt^2}dt<\int_0^{\infty}e^{-mt^2}dt$ …⑥ となります。

また，⑤において $x=t^2$ とすれば $e^{t^2}\geqq 1+t^2$ となり $e^{-t^2}\leqq\dfrac{1}{1+t^2}$

したがって $e^{-mt^2}\leqq\dfrac{1}{(1+t^2)^m}$ となるので，$\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-mt^2}dt<\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^m}dt$ …⑦ となります。

③，④，⑥，⑦より $\displaystyle S_{2m+1}=\int_0^1(1-t^2)^m dt<\int_0^{\infty}e^{-mt^2}dt<\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)^m}dt=S_{2m-2}$ となります。

よって $\displaystyle S_{2m+1}<\int_0^{\infty}e^{-mt^2}dt<S_{2m-2}$ が得られ，$\sqrt{m}$ を辺々にかけて

$\displaystyle\sqrt{m}\,S_{2m+1}<\sqrt{m}\int_0^{\infty}e^{-mt^2}dt<\sqrt{m}\,S_{2m-2}$ …⑧ を得ます。

ここで，⑧の真ん中の式は $\sqrt{m}t=x$ とおくことで $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$ になり，

⑧の右辺の式について $\displaystyle\sqrt{m}\,S_{2m-2}=\sqrt{m}\cdot\frac{2m}{2m-1}S_{2m}=\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}\cdot\sqrt{m}\,S_{2m+1}$ と変形でき，

（＊）より $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sqrt{m}\,S_{2m-2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{2m-1}\cdot\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}\cdot\sqrt{m}\,S_{2m+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であるから

はさみうちの原理により $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ が得られます。

最後に，積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ の表すものを確認しておきます。

関数 e^{-x^2} は偶関数なので、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ となることがすぐにわかると思いますが，積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$ は

関数 $y=e^{-x^2}$ のグラフと x 軸の間の面積を表すことになります。この部分の面積が $\sqrt{\pi}$ になるわけです。

（x 軸は漸近線）