Wallis の公式

なんとも不思議な香りのする次の公式を証明してみます。

（1）$\dfrac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$　　　（2）$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}$

まずは，次の補題から証明していきます。

【補題】 $S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$ とおくと，$S_0=\dfrac{\pi}{2}$, $S_1=1$ であり，

$n\geqq 2$ に対し，n が偶数ならば　$S_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$　であり，

n が奇数ならば　$S_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$　である。

［証明］ $S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ に対し，部分積分をすると

$$
\begin{aligned}
S_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)'\,dx\\
&=[\sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)\,dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx\\
&=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\right)\\
&=(n-1)(S_{n-2}-S_n)
\end{aligned}
$$

よって，$nS_n=(n-1)S_{n-2}$ となるから $S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$ を得る。

$S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\dfrac{\pi}{2}$,　$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^1 x\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos 0=1$ であり，

n が偶数のとき $S_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$　　n が奇数のとき $S_n=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1$

となる。　（証明終）

次に，Wallis の公式を証明します。

［証明］【補題】の結果において

$n=2m$（偶数のとき），$n=2m+1$（奇数のとき）とおくと

$S_{2m}=\dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}$，　$S_{2m+1}=\dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1$　となるので，

$$\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}=\frac{\dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdots\cdots\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdots\cdots\dfrac{2}{3}\cdot 1}$$

$$=\frac{\dfrac{2m-1}{2m}}{\dfrac{2m}{2m+1}}\cdot\frac{\dfrac{2m-3}{2m-2}}{\dfrac{2m-2}{2m-1}}\cdots\cdots\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}\cdot\frac{\dfrac{\pi}{2}}{1}$$

$$=\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}\cdot\frac{(2m-3)(2m-1)}{(2m-2)^2}\cdots\cdots\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\cdots\frac{(2m-3)(2m-1)}{(2m-2)^2}\cdot\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}\quad\cdots①$$

ここで，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において　$0<\sin x<1$　であることから，$0<\sin^{n+1}x<\sin^n x$　であり，

区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ で積分すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$　から

$0<S_{n+1}<S_n\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$　となる。これを S_{n+1} で割って　$1<\dfrac{S_n}{S_{n+1}}$　を得る。

そして　$n=2m$　とすれば　$1<\dfrac{S_{2m}}{S_{2m+1}}$ であり，$S_{n+1}<S_n$　より　$S_{2m}<S_{2m-1}$　なので

$1<\dfrac{S_{2m}}{S_{2m+1}}<\dfrac{S_{2m-1}}{S_{2m+1}}$　…②となるが，漸化式　$S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}$　により，

$\dfrac{S_{n-2}}{S_n}=\dfrac{n}{n-1}$　であるから，②の右辺は　$\dfrac{S_{2m-1}}{S_{2m+1}}=\dfrac{2m+1}{2m}$ となる。

よって②において　$m\to\infty$　とすれば　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}1<\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}<\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m-1}}{S_{2m+1}}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m+1}{2m}$　より

ハサミウチの原理から　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}=1$

したがって，①で $m\to\infty$ とすれば、

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\cdots\frac{(2m-3)(2m-1)}{(2m-2)^2}\cdot\frac{(2m-1)(2m+1)}{(2m)^2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}=\frac{2}{\pi}\quad\cdots③$$ が得られる。

$\dfrac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}=\dfrac{(2k)^2-1}{(2k)^2}=1-\dfrac{1}{(2k)^2}$ という変形を考えれば，③の左辺が変形できて，

$\dfrac{2}{\pi}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$ …「Wallis の公式（1)」を得ます。

また，③の式の逆数を考えると，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdots\cdots\frac{(2m-2)^2}{(2m-3)(2m-1)}\cdot\frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)}=\frac{\pi}{2}\quad\cdots\cdots④$$

この式の両辺の平方根をとると，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot4\cdots\cdots2m}{3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)\cdot\sqrt{2m+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\cdots\cdots⑤$$

となるが、この式の左辺の $\dfrac{2\cdot4\cdots\cdots2m}{3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}$ の分母・分子に　$2\cdot4\cdots\cdots2m=2^m\cdot m!$　を掛けると

$\dfrac{2^{2m}(m!)^2}{(2m)!}$ となることから，⑤は $\lim_{m\to\infty}\dfrac{2^{2m}(m!)^2}{\sqrt{2m+1}(2m)!}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ となり，

さらにこの式の両辺に $\lim_{m\to\infty}\dfrac{\sqrt{2m+1}}{\sqrt{m}}=\sqrt{2}$　を掛けると，

$\lim_{m\to\infty}\dfrac{2^{2m}(m!)^2}{\sqrt{m}\,(2m)!}=\sqrt{\pi}$　…「Wallis の公式（2)」が得られます。

［証明終］