ベクトルの外積

２つのベクトルから１つの実数を生み出す演算である「内積」に対し，２つのベクトルから１つのベクトルを生み出す演算である「外積」を定義し，その利用方法を紹介します。

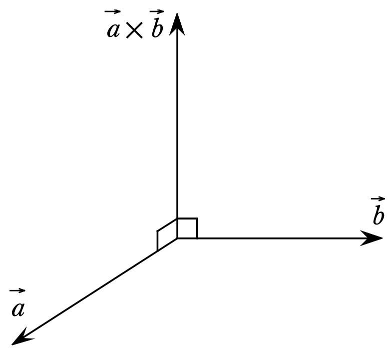
> ◆定義◆
>
> ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$,$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ に対し，
>
> ベクトル $(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**外積**とよび、$\vec{a}\times\vec{b}$ と書く。

このとき，次のことが成り立ちます。

（1）$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

（2）$\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a},\vec{b}$ のそれぞれに垂直である。

（3）$|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$



〔証明〕

（1）定義から，$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$

$$\vec{b}\times\vec{a}=(b_2a_3-b_3a_2,\ b_3a_1-b_1a_3,\ b_1a_2-b_2a_1)$$

$$\therefore\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

（2）$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)\cdot(a_1,\ a_2,\ a_3)$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)a_1+(a_3b_1-a_1b_3)a_2+(a_1b_2-a_2b_1)a_3$$

$=0$　　　　同様にして，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=0$

よって，$\vec{a}\times\vec{b}$ は $\vec{a},\ \vec{b}$ のそれぞれに垂直である。

（3）$|\vec{a}\times\vec{b}|^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

$$=({a_2}^2{b_3}^2+{a_3}^2{b_2}^2)+({a_3}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_3}^2)+({a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2)+({a_1}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+{a_3}^2{b_3}^2)$$

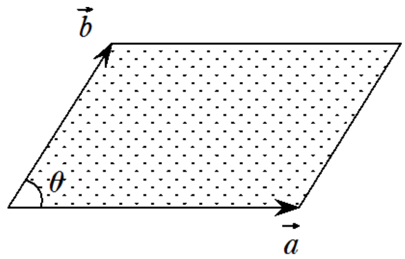
$$=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2)$$

$=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$　　　　$\therefore\ |\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$

＜外積の応用＞

★ (2)の性質から，空間内の２つのベクトルに対し，その両方に垂直なベクトルを求めたい場合には，外積を計算すればよいことがわかります。垂直なベクトルが１つ見つかれば，そのベクトルを実数倍したベクトルも垂直になります。

★ (3)の性質から次のことがわかります。



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\times\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)\\
&= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

したがって，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積が $|\vec{a}\times\vec{b}|$ となります。

★ ３点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ を頂点とする三角形 OAB の面積 S は

$S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ となることを外積の計算を利用して確認します。

O, A, B は xy 平面上の点ですが，これを xyz 空間の座標で表せば，

$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ 0)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ 0)$ であり，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_1,\ y_1,\ 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x_2,\ y_2,\ 0)$ の張る平行四辺形の面積は，外積計算により

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}| &= |(y_1\cdot 0-0\cdot y_2,\ 0\cdot x_2-x_1\cdot 0,\ x_1\cdot y_2-x_2\cdot y_1)|\\
&= |(0,\ 0,\ x_1y_2-x_2y_1)|\\
&= \sqrt{0^2+0^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}\\
&= |x_1y_2-x_2y_1|
\end{aligned}
$$

であることから，三角形 OAB の面積 S はその半分なので $S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$ となります。