直線のベクトル方程式

直線の方程式①

$\boxed{\mathrm{A}(\vec{a})\text{ を通り，}\vec{d}\text{ と平行な直線}}$　　（注）$\vec{d}$ ：方向ベクトル（方向：direction）

$\mathrm{P}(\vec{p})$ を直線上の点とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \,/\!/\, \vec{d}$　であるから，

媒介変数 t を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\vec{d}$　$\Leftrightarrow$　$\vec{p} - \vec{a} = t\vec{d}$　$\Leftrightarrow$　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　（t は実数）と表せる。

直線の方程式②

$\boxed{2\text{ 点 }\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b})\text{ を通る直線}}$

$\mathrm{P}(\vec{p})$ を直線上の点とすると，①において　$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$　となるので，

媒介変数 t を用いて　$\vec{p} = \vec{a} + t\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$　（t は実数）と表せる。

直線の方程式③

$\boxed{\mathrm{A}(\vec{a})\text{ を通り，}\vec{n}\text{ に垂直な直線}}$　　（注）$\vec{n}$ ：法線ベクトル（normal vector）

$\mathrm{P}(\vec{p})$ を直線上の点とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$　となるので

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$　$\Leftrightarrow$　$\left(\vec{p} - \vec{a}\right) \cdot \vec{n} = 0$　と表せる。

直線の方程式④

$\boxed{\mathrm{A}(\vec{a}),\ \mathrm{B}(\vec{b})\text{ に対し，}\angle\mathrm{AOB}\text{ の 2 等分線}}$

$\mathrm{P}(\vec{p})$ を直線上の点とすると，ベクトル $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ が 2 等分線の方向となるので

媒介変数 t を用いて　$\vec{p} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$　（t は実数）と表せる。

★（③と関連して）直線の一般形 $ax + by + c = 0$ と法線ベクトル

$\vec{a} = (x_1,\ y_1)$　を通り，$\vec{n} = (a,\ b)$　に垂直な直線上の点を　$\vec{p} = (x,\ y)$　とすると

直線の方程式③の関係から　$\left(\vec{p} - \vec{a}\right) \cdot \vec{n} = 0$　$\Leftrightarrow$　$(x - x_1,\ y - y_1) \cdot (a,\ b) = 0$

$$\Leftrightarrow\ a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ ax + by - ax_1 - by_1 = 0$$

$-ax_1 - by_1 = c$　とおくと　$ax + by + c = 0$　となることから

直線　$ax + by + c = 0$　…（＊）　において，$x,\ y$ の係数を並べたベクトル　$\vec{n} = (a,\ b)$　は

直線（＊）の法線ベクトル（の１つ）となっている。