「高次方程式の解と係数」「３次方程式の解と係数の関係」

係数が実数である方程式が複素数解をもてば，その共役複素数も解となる

複素数αに対し，その共役複素数を$\overline{\alpha}$で表す。α, βを複素数とすると、次が成り立つ。

$\overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$ …①　　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$ …②　　また，実数aに対しては，$\overline{a}=a$ …③が成り立つ。

実数が係数であるn次方程式　$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$　があるとする。

この方程式が複素数解αをもつとすると，$f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0$ …（＊）

が成り立つ。ここで，（＊）の両辺と共役な複素数を考えると，

$$\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots\cdots+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0}=\overline{0}$$

$$\overline{a_n\alpha^n}+\overline{a_{n-1}\alpha^{n-1}}+\cdots\cdots+\overline{a_2\alpha^2}+\overline{a_1\alpha}+\overline{a_0}=\overline{0}$$　（①の性質より）

$$a_n\overline{\alpha^n}+a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}}+\cdots\cdots+a_2\overline{\alpha^2}+a_1\overline{\alpha}+a_0=0$$　（②と③の性質より）

$$a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots\cdots+a_2\overline{\alpha}^2+a_1\overline{\alpha}+a_0=0$$　（②の性質より）…（＊２）

となるが，（＊２）の式は　$f(\overline{\alpha})=0$　を意味するので，係数が実数である方程式が複素数解をもてば，その共役複素数も解となることが証明された。

３次方程式の解と係数の関係

３次方程式　$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq0)$　の３つの解を　α, β, γ　とすると，次が成り立つ。

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

※２次方程式の解と係数の関係とともに，理解しながら覚えておくこと。

【例題】$x^3-3x^2+ax+b=0$の１つの解が$1-3i$であるとき，実数の定数a, bの値を求めよ。また，他の解を求めよ。

〔解答１〕（１つの解を代入して、$a+bi=0 \iff a=b=0$　を利用する）

$x=1-3i$を代入して　$(1-3i)^3-3(1-3i)^2+a(1-3i)+b=0$

実部、虚部について整理して　$(a+b-2)+(-3a+36)i=0$

複素数の相等から　$\begin{cases}a+b-2=0\\ -3a+36=0\end{cases}$　$\therefore\ a=12, b=-10$

このとき，もとの方程式は　$x^3-3x^2+12x-10=0$

$(x-1)(x^2-2x+10)=0$　より　$x=1, 1\pm3i$

したがって，$a=12, b=-10$　他の解は　$1, 1+3i$

〔解答２〕（実数係数の方程式では，１つ複素数解をもてばその共役複素数も解となることを利用する）

$x^3-3x^2+ax+b=0$ は実数係数の方程式だから，$1-3i$ の共役複素数である$1+3i$ も解となる。

他の解をγ とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases}(1+3i)+(1-3i)+\gamma=3\\(1+3i)(1-3i)+(1-3i)\gamma+\gamma(1+3i)=a\\(1+3i)(1-3i)\gamma=-b\end{cases}$$

これを解いて　$\gamma=1,\ a=12,\ b=-10$

したがって，$a=12,\ b=-10$　他の解は $1,\ 1+3i$

以上を踏まえて，次の【練習】をやってみよう。（解答１）（解答２）のどちらの方法でもよい。

【練習１】a,b を実数とする。$x=1+\sqrt{3}\,i$ が $x^3+ax+b=0$ の解であるとき，a,b の値と他の解を求めよ。

【練習２】$x^3-5x^2+px+q=0$ の解の１つが$3+2i$ であるとき，実数の定数 $p,\ q$ の値を求めよ。また，この方程式の他の解を求めよ。（問題集第１巻 258）