行列のｎ乗

２行２列の行列についてそのｎ乗を求める計算を紹介する。方法は多々あるが、大きく分けるとハミルトン・ケーリーの定理を利用する方法と利用しない方法がある。まずはハミルトン・ケーリーの定理を復習しよう。

ハミルトン・ケーリーの定理

任意の行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し、 $A^2-(a_{11}+a_{22})A+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})E=O\cdots$（＊）

が成立する（E は単位行列、O は零行列）。

行列 A の対角成分の和である $a_{11}+a_{22}$ を trace（トレース：跡（セキ））といい、

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ を determinant（ディターミナント：行列式）という。

それぞれ略して tr A、det A と表すので覚えておこう。

[A]ハミルトン·ケーリーの定理を利用する方法

■（A-1） $\det A=0$ のとき

（例題１） $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕ハミルトン・ケーリーの定理より、 $A^2-(4+1)A+(4\cdot 1-2\cdot 2)E=O$ 　　$\therefore A^2=5A\cdots$（＊）

（＊）の関係を繰り返し用いることにより、 $A^n=5^{n-1}A$

※（＊）は、行列 A に対して「『行列 A を乗じること』と『５を乗じること』が同等の価値をもつ」ということを表している。

$$よって、A^n=5^{n-1}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\cdot 5^{n-1} & 2\cdot 5^{n-1} \\ 2\cdot 5^{n-1} & 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

一般的に、$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し、$\det A=0$（つまり、$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$）ならば、 $A^n=(a_{11}+a_{22})^{n-1}A$

【練習 A-1】 $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、 A^n を求めよ。

■（A−２）tr $A=0$ のとき

（例題 2） $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕ハミルトン・ケーリーの定理より、$A^2-(2+(-2))A+(2\cdot(-2)-(-2)\cdot 1)E=O \quad \therefore A^2=2E \cdots$（＊）

（＊）の関係より、$A^3=AA^2=A(2E)=2A$

$A^4=AA^3=A(2A)=2A^2=2(2E)=2^2E$

$A^5=AA^4=A(2^2E)=2^2A$

$\vdots$

となることがわかる。したがって、

m を 1 以上の整数として、$n=2m$ のとき　$A^n=2^mE=2^m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ 0 & 2^m \end{pmatrix}$

$n=2m-1$ のとき　$A^n=2^{m-1}A=2^{m-1}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^m & -2^m \\ 2^{m-1} & -2^m \end{pmatrix}$

一般的に、$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対し、tr $A=0$（つまり、$a_{11}+a_{22}=0$）ならば、

$n=2m$ のとき　$A^n=(-a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})^mE$

$n=2m-1$ のとき　$A^n=(-a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21})^{m-1}A$

【練習 A-2】 $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

■（A－３） $\det A \neq 0$、$\mathrm{tr}\, A \neq 0$ のとき

（例題３） $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕ハミルトン・ケーリーの定理より、$A^2-(1+(-2))A+(1\cdot(-2)-1\cdot 0)E=O$

$$\therefore A^2+A-2E=O \cdots （＊）$$

$$（＊）\Leftrightarrow \begin{cases} A^2-A=-2(A-E) \\ A^2+2A=A+2E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(A-E)=-2(A-E) & \cdots ① \\ A(A+2E)=A+2E & \cdots ② \end{cases}$$

① $\Leftrightarrow$ $A^n(A-E)=(-2)^n(A-E)$

$\Leftrightarrow$ $A^{n+1}-A^n=(-2)^n(A-E)$ $\cdots$③

② $\Leftrightarrow$ $A^n(A+2E)=A+2E$

$\Leftrightarrow$ $A^{n+1}+2A^n=A+2E$ $\cdots$④

④－③より、$3A^n=(A+2E)-(-2)^n(A-E)$

$$A^n=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-(-2)^n\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-(-2)^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1-(-2)^n \\ 0 & 3\cdot(-2)^n \end{pmatrix}$$

〔補足〕

①、②の変形には（＊）で $A\to x$，$E\to 1$ とした２次方程式 $x^2+x-2=0$ の２解 $x=-2,1$ を利用する。

２解が $\alpha,\ \beta$ のとき，$\begin{cases} A(A-\alpha E)=\beta(A-\alpha E) \\ A(A-\beta E)=\alpha(A-\beta E) \end{cases}$ と変形が可能だからである。（隣接３項間漸化式と似ているね！）

【練習 A－３】 $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

■（A－４）多項式の割り算を利用①

（例題４） $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕ハミルトン・ケーリーの定理より、$A^2-((-2)+3)A+((-2)\cdot 3-1\cdot(-4))E=O$

$\therefore A^2-A-2E=O\cdots$（＊）

ここで、形式的に $f(x)=x^n$ を x^2-x-2 で割ることを考える。

２次式で割った余りは１次式以下になるから、商を $P(x)$ とすると、余りは $ax+b$ とおける。

よって　$f(x)=x^n=(x^2-x-2)P(x)+ax+b\cdots$（＊２）

$=(x+1)(x-2)P(x)+ax+b$　と表せる。

$\begin{cases} f(-1)=(-1)^n=-a+b \\ f(2)=2^n=2a+b \end{cases}$ より　$a=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3},\ b=\dfrac{2^n+2\times(-1)^n}{3}$　であり

（＊２）で　$x\to A$ とすると

$A^n=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}A+\dfrac{2^n+2\times(-1)^n}{3}E$　$\leftarrow A^2-A-2E=O$ より。単位行列 E を補うことにも注意。

$=\dfrac{2^n-(-1)^n}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}+\dfrac{2^n+2\times(-1)^n}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-2^n+4\times(-1)^n & 2^n-(-1)^n\\ -2^{n+2}+4\times(-1)^n & 2^{n+2}-(-1)^n\end{pmatrix}$

【練習 A－４】 $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

■（A－５）多項式の割り算を利用②

（例題５） $A=\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕ハミルトン・ケーリーの定理より、 $A^2-((-4)+(-2))A+((-4)\cdot(-2)-(-1)\cdot 1)E=O$

$\therefore A^2+6A+9E=O$ …（＊）

ここで、形式的に $f(x)=x^n$ を x^2+6x+9 で割ることを考える。

２次式で割った余りは１次式以下になるから、商を $P(x)$ とすると、余りは $ax+b$ とおける。

よって　$f(x)=x^n=(x^2+6x+9)P(x)+ax+b$ …（＊２）

$=(x+3)^2P(x)+ax+b$ と表せる。

微分して　$f'(x)=nx^{n-1}=2(x+3)P(x)+(x+3)^2P'(x)+a$　 $\leftarrow \{g(x)h(x)\}'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$

$\begin{cases} f(-3)=(-3)^n=-3a+b \\ f'(-3)=n(-3)^{n-1}=a \end{cases}$ より　$a=n(-3)^{n-1},\ b=(1-n)(-3)^n$ であり

（＊２）で $x\to A$ とすると

$A^n=n(-3)^{n-1}A+(1-n)(-3)^nE$　 $\leftarrow A^2+6A+9E=O$ より。単位行列 E を補うことにも注意。

$=n(-3)^{n-1}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+(1-n)(-3)^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4n(-3)^{n-1}+(1-n)(-3)^n & -n(-3)^{n-1} \\ n(-3)^{n-1} & -2n(-3)^{n-1}+(1-n)(-3)^n \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} (-n-3)(-3)^{n-1} & -n(-3)^{n-1} \\ n(-3)^{n-1} & (n-3)(-3)^{n-1} \end{pmatrix}$

【練習 A－５】 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

［B］ハミルトン･ケーリーの定理を利用しない方法

■（B−1）固有値・固有ベクトルを利用＋対角化しない

（例題６） $A=\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕 $A\vec{u}=k\vec{u}$ …（＊）となる $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を求める。　←$x=0,\ y=0$ 以外の解をもつようにしたい。

（＊）$\Leftrightarrow$ $A\vec{u}=kE\vec{u}$

$\Leftrightarrow (A-kE)\vec{u}=\vec{0}$ …（＊２）

ここで、$(A-kE)^{-1}$ が存在すると仮定すると、$\vec{u}=\vec{0}$ となり $x=0,\ y=0$ のみが解となってしまう。

したがって、$(A-kE)^{-1}$ が存在しないために $\det(A-kE)=0$

$\Leftrightarrow (4-k)(-1-k)-2\cdot3=0$

$\Leftrightarrow k^2-3k-10=0$

$\Leftrightarrow (k-5)(k+2)=0$　　$k=5,-2$　←これらを「固有値」という。

（１）$k=5$ のとき

（＊２）$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&2\\3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=2y$

$\vec{u_1}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ とおくと、（＊２）は成り立つ。　←$k=5$ に対する固有ベクトルという。

よって、$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ …①

（２）$k=-2$ のとき

（＊２）$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}6&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x=-y$

$\vec{u_2}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ とおくと、（＊）は成り立つ。　←$k=-2$ に対する固有ベクトルという。

よって、$A\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ …②

①、②よりそれぞれ　$A^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=5^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot5^n\\5^n\end{pmatrix}$、$A^n\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=(-2)^n\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-2)^n\\-3(-2)^n\end{pmatrix}$

したがって、$A^n\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot5^n&(-2)^n\\5^n&-3(-2)^n\end{pmatrix} \Leftrightarrow A^n=\begin{pmatrix}2\cdot5^n&(-2)^n\\5^n&-3(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-3\end{pmatrix}^{-1}$

$$=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}2\cdot5^n&(-2)^n\\5^n&-3(-2)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\cdot5^n+(-2)^n&2\cdot5^n+(-2)^{n+1}\\3\cdot5^n-3(-2)^n&5^n-3(-2)^{n+1}\end{pmatrix}$$

■（B－2）固有値・固有ベクトルを利用＋対角化する

（例題７） $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕（B－１）と固有値・固有ベクトルを求めるところまでは同じ。

$\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$ に対して $P=(\overrightarrow{u_1}\ \overrightarrow{u_2})=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ であり

$P^{-1}AP=\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ となる。　←これを行列 A の対角化という。

したがって、$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}^n$ から $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}$

よって、$A^n=P\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & (-2)^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}6\cdot5^n+(-2)^n & 2\cdot5^n+(-2)^{n+1}\\ 3\cdot5^n-3(-2)^n & 5^n-3(-2)^{n+1}\end{pmatrix}$

【練習 B－２】 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

■（B-３）数学的帰納法

（例題８）$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。

〔解答〕$A^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$、$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}$ より $A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$

と推定できるので、これが正しいことを数学的帰納法で証明する。

（ｉ）$n=1$ のとき　$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ より成り立っている。

（ⅱ）$n=k$ のとき、$A^k=\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}$ であると仮定する。このとき、

$A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2k\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2k+2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2(k+1)\\0&1\end{pmatrix}$ より、$n=k+1$ のときにも成立。

（ｉ）（ⅱ）より　$A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}$

【練習 B-3】$A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$ のとき、A^n を求めよ。