「２×２行列の対角化」

２×２の正方行列を A とする。このとき，ある行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることができる。対角化することで，A^n を容易に求めることができるなどのメリットがある。ここではまず，行列 A に対して，対角化に利用される行列 P をどのように見つければよいかを説明する。その後，A^n を求める。

１．固有値と固有ベクトル

いま，$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ とする。

$\vec{p}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ と実数 k に対して $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ すなわち $A\vec{p}=k\vec{p}$ が成り立つとする。

この式は，「同じ $\vec{p}\ (\neq\vec{0})$ に対し，行列 A をかけることと，実数 k をかけることが同じ価値を持っている」ということを意味している式と捉えられる。

$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ は 表示を変えれば $\begin{cases}3x_1+y_1=kx_1\\ 2x_1+4y_1=ky_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3-k)x_1+y_1=0\\ 2x_1+(4-k)y_1=0\end{cases}$ となるので

$\begin{pmatrix}3-k & 1\\ 2 & 4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ と同じである。ここで，$\begin{pmatrix}3-k & 1\\ 2 & 4-k\end{pmatrix}$ に逆行列が存在してしまうと

$\begin{pmatrix}3-k & 1\\ 2 & 4-k\end{pmatrix}^{-1}$ を左からかけることにより $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となってしまう。

これは $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ と矛盾するので，$\begin{pmatrix}3-k & 1\\ 2 & 4-k\end{pmatrix}$ は逆行列をもたない。

したがって $\det\begin{pmatrix}3-k & 1\\ 2 & 4-k\end{pmatrix}=(3-k)(4-k)-1\cdot 2=k^2-7k+10=(k-2)(k-5)=0$ から

$k=2,5$ という値が得られる。この値を行列 A の固有値という。

＜まとめ①＞

行列 A と $\vec{p}=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，実数 k に対して，$A\vec{p}=k\vec{p}$ を満たす k を行列 A の固有値という。

固有値は行列 $A-kE$ に逆行列が存在しないという条件から $\det(A-kE)=0$ を計算することにより求めることができる。

（ｉ）$k=2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より $x_1+y_1=0$ が得られる。

この $x_1+y_1=0$ を満たす $x_1,\ y_1$ は無数に存在するが，できるだけ簡単な値としては

$x_1=1,\ y_1=-1$ を選ぶことができる。ここで選んだ $\vec{p}=\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を固有ベクトルという。

（$x_1+y_1=0$ を満たしていれば，$x_1,\ y_1$ の選び方は自由なので，このベクトルは人によって変わる）

（ⅱ）$k=5$ のとき

（ｉ）と同様にして $\vec{p}=\overrightarrow{p_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られる。

（（ｉ）と混同しないようにするため，$\overrightarrow{p_2}=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ として区別した）

（ｉ）（ⅱ）で得られたものをまとめると

固有値 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

固有値 5 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が得られたということになる。

＜まとめ②＞

得られた固有値に対し，それぞれ $A\vec{p}=k\vec{p}$ を満たす $\vec{p}$ を固有ベクトルという。

固有ベクトルは，固有値ごとに１つずつ決まるので，

固有値 k_1 に対する固有ベクトル $\overrightarrow{p_1}$，固有値 k_2 に対する固有ベクトル $\overrightarrow{p_2}$ のように表現される。

2．行列の対角化

ここまでで固有値と固有ベクトルが 2 組得られた。したがって

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ が成り立つことがわかった。

これらをまとめて 1 つの式で表せば,

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ となる。

ここで, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $AP = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ であり, $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$ が得られる。

このように, $P^{-1}AP$ が対角行列になるように変形することを行列 A の行列 P による対角化という。

（対角成分には必ず固有値が表れる）

＜まとめ③＞

得られた 2 つの固有値と固有ベクトルを利用すると,

$\begin{cases} A\overrightarrow{p_1} = k_1\overrightarrow{p_1} \\ A\overrightarrow{p_2} = k_2\overrightarrow{p_2} \end{cases}$ **から** $A\begin{pmatrix} \overrightarrow{p_1} & \overrightarrow{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1\overrightarrow{p_1} & k_2\overrightarrow{p_2} \end{pmatrix}$ **すなわち** $A\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1x_1 & k_2x_2 \\ k_1y_1 & k_2y_2 \end{pmatrix}$

とまとめることができて, $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ **とおくと**

$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ **という形に変形することができる。これが行列 A の行列 P による対角化である。**

以上が対角化の手順の詳細であるが，行列 A の対角化に必要な行列 P の見つけ方としては結局,

行列 A の固有値・固有ベクトルを求める ⇒ 固有ベクトルを並べて行列を作ったものが P ということ。

3．行列の n 乗（対角化を利用）

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$ より　両辺を n 乗すると $\left(P^{-1}AP\right)^n=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}^n$ より $P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$

左から P，右から P^{-1} をかけると

$$A^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n&5^n\\-2^n&2\cdot5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^{n+1}+5^n&-2^n+5^n\\-2^{n+1}+2\cdot5^n&2^n+2\cdot5^n\end{pmatrix}$$ が得られる。

＜まとめ④＞

$P^{-1}AP=B$（B は対角行列）と表せているので

両辺を n 乗し，左から P，右から P^{-1} をかけて　$A^n=PB^nP^{-1}$　となる。

4．固有値が重解になったら・・・

固有値が重解になるときは，対角化できるときとできないときがある。

対角化できないときでも，$\begin{pmatrix}k&1\\0&k\end{pmatrix}$ という形を導くことはでき，この変形を三角化という。

三角行列については 2 乗，3 乗，…と計算していけば， n 乗は容易に推定できる。

入試問題などで重解になるときが出題された場合は，誘導がつくので問題の指示に従って解く。

5．演習

$A=\begin{pmatrix}1&-2\\1&4\end{pmatrix}$ のとき、行列 A を対角化し， A^n を求めよ。

（解答は最後のページ）

６．行列のｎ乗（その他）

行列のｎ乗を求める方法としては，対角化は比較的手間のかかる方法である。他にも様々な方法があるので対角化も含め，いくつか紹介しておく。

① A の固有ベクトルから行列 P を作り，対角化する。

② A の固有ベクトルから $A^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=k^n\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$A^n\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=k^n\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ を求める。

③ $A^2, A^3, \cdots$ から A^n を計算し，数学的帰納法により証明する。

④ $A=\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}$ の形に対しては，「回転＋相似拡大」の考えを利用する。

⑤ $A^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{pmatrix}$ とおき，$A^{n+1}=AA^n$ から漸化式を導いて解く。

⑥ 整式 x^n を $x^2-(a+d)x+(ad-bc)$ で割った余りを $px+q$ とし，$A^n=pA+qE$ を求める。

〔演習の解答〕

$A\vec{u}=k\vec{u}\cdots$（＊）となる $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ を求める。

（＊）$\Leftrightarrow$ $A\vec{u}=kE\vec{u}$ $\Leftrightarrow (A-kE)\vec{u}=\vec{0}$

ここで，$(A-kE)^{-1}$ が存在すると仮定すると，$\vec{u}=\vec{0}$ となり矛盾。

したがって，$\det(A-kE)=0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-k)(4-k)-(-2)\cdot 1=0$

$$\Leftrightarrow \quad k^2-5k+6=0$$

$$\Leftrightarrow \quad (k-2)(k-3)=0 \qquad k=2,\ 3 \quad \leftarrow \text{固有値}$$

（ｉ）$k=2$ のとき

（＊）$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $x=-2y$ 　　よって、$\vec{u_1}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\cdots$①

（ⅱ）$k=3$ のとき

（＊）$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $x=-y$ 　　よって、$\vec{u_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\cdots$②

①，②より　$P=(\vec{u_1}\ \vec{u_2})=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$ おくと，$P^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}$

よって，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$

したがって，$(P^{-1}AP)^n=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}^n$ 　から　$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}$

よって，$A^n=P\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}P^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3^n+2^{n+1} & -2\cdot 3^n+2^{n+1}\\3^n-2^n & 2\cdot 3^n-2^n\end{pmatrix}$$