１５８．定積分④

（1）$-\dfrac{2}{e}+1$　（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2$　（3）$\dfrac{1}{24}\log 3+\dfrac{\sqrt{3}}{72}\pi$

次の定積分を求めよ。

（1）$\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x^2}dx=\int_1^e x^{-2}\log x\,dx=\int_1^e(-x^{-1})'\log x\,dx=\Big[-x^{-1}\log x\Big]_1^e-\int_1^e(-x^{-1})\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=-e^{-1}+\int_1^e x^{-2}\,dx=-e^{-1}+\Big[-x^{-1}\Big]_1^e=-e^{-1}-e^{-1}+1=-\frac{2}{e}+1$$

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}x(\tan x)'\,dx=\big[x\tan x\big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{-\sin x}{\cos x}dx$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\big[\log|\cos x|\big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\log\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\log 2$$

（3）$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+8}dx=\int_0^1\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}dx$

ここで，$\dfrac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{bx+c}{x^2-2x+4}$ を満たす $a,\ b,\ c$ を求めると

$$\frac{a}{x+2}+\frac{bx+c}{x^2-2x+4}=\frac{a(x^2-2x+4)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+(-2a+2b+c)x+4a+2c}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

係数を比較して　$a+b=0$　かつ　$-2a+2b+c=0$　かつ　$4a+2c=1$　より

$a=\dfrac{1}{12}$，$b=-\dfrac{1}{12}$，$c=\dfrac{1}{3}$

よって　$\dfrac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{x-4}{x^2-2x+4}\right)$　となる。

したがって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}dx=\frac{1}{12}\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{x-4}{x^2-2x+4}\right)dx$

$$=\frac{1}{12}\left(\int_0^1\frac{1}{x+2}dx-\int_0^1\frac{x-4}{x^2-2x+4}dx\right)\quad\cdots(*)$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+2}dx=\big[\log|x+2|\big]_0^1=\log 3-\log 2=\log\frac{3}{2}$　…①

$$\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-2x+4}dx=\int_0^1 \frac{x-4}{(x-1)^2+3}dx$$ …② については

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

$x:0\to 1$ のとき $\theta:-\dfrac{\pi}{6}\to 0$ であるから

$$② = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\sqrt{3}\tan\theta-3}{3\tan^2\theta+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left(\tan\theta-\sqrt{3}\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sqrt{3}\right)d\theta$$

$$=\Big[-\log|\cos\theta|-\sqrt{3}\,\theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$ …③

よって ①，③より

$$（＊）=\frac{1}{12}\left\{\log\frac{3}{2}-\left(\log\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\left(\log\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$$

$$=\frac{1}{24}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{72}\pi$$