１５７．定積分③

(1) $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$　(2) $\log 2$　(3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{2}{3}$　(4) $\log 2+\dfrac{\pi}{12}$

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+9}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2+9-9}{x^2+9}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=\int_0^{\sqrt{3}}1dx-9\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}dx$ …（＊）

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}1dx=\sqrt{3}$ …①

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}dx$ …② においては，$x=3\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

$x:0\to\sqrt{3}$ のとき $\theta:0\to\dfrac{\pi}{6}$ であるから

$$②=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9\tan^2\theta+9}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}1d\theta$$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{18}$ …③

①，③より （＊）$=\sqrt{3}-9\cdot\dfrac{\pi}{18}=\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\log x}=\int_e^{e^2}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx$ …（＊）

$\log x=t$ とおくと $\dfrac{1}{x}dx=dt$ であり，$x:e\to e^2$ のとき $t:1\to 2$ であるから

（＊）$\displaystyle=\int_1^2\frac{1}{t}dt=\left[\log|t|\right]_1^2=\log 2$

(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x\,dx$ …（＊）

$1+x^2=t$ とおくと $2xdx=dt$ であり，$x:0\to 1$ のとき $t:1\to 2$ であるから

（＊）$\displaystyle=\int_1^2\frac{t-1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt+\int_1^2-t^{-\frac{1}{2}}dt\right)=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2-\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^2\right)$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)-2\left(2^{\frac{1}{2}}-1\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2}{3}$$

(4) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x+1}{x^2+1}dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}dx + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$ …（＊）

ここで，$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}dx = \Big[\log|x^2+1|\Big]_1^{\sqrt{3}} = \log 4 - \log 2 = 2\log 2 - \log 2 = \log 2$ …①

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}dx$ …② においては，$x = \tan\theta$ とおくと $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

$x : 1 \to \sqrt{3}$ のとき $\theta : \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{\pi}{3}$ であるから

②$\displaystyle = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ …③

①，③より （＊）$= \log 2 + \dfrac{\pi}{12}$