１５６．定積分②

（1）$1-\dfrac{\pi}{4}$　（2）$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$　（3）$2\sqrt{2}$　（4）$e^2+6\log 3-11$

次の定積分を求めよ。

（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

（2）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cdot(\tan x)'\,dx=\Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$　（部分積分）

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\frac{\pi}{4}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

（3）$\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$　（合成）

$$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}+\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}$$

$$=2\sqrt{2}\ \int_0^{\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

〔別解〕

$\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$ から置換積分をする。

$x+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと $dx=dt$ であり，$x:0\to\pi$ のとき $t:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{5}{4}\pi$ であるから

$$\int_0^{\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin t\,dt-\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin t\,dt\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}+\Big[\cos t\Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\right)=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\right\}=2\sqrt{2}$$

（注）$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}|\sin t|\,dt$ は，図形的に sin のグラフの山１つ分であるから２としてもよいでしょう。

（4） $\int_0^2 |e^x - 3|\,dx$

$0 \leqq x \leqq \log 3$ のとき　$e^x \leqq 3$，　$\log 3 \leqq x \leqq 2$ のとき　$e^x \geqq 3$　であるから

$$\int_0^2 |e^x - 3|\,dx = \int_0^{\log 3} \{-(e^x - 3)\}\,dx + \int_{\log 3}^2 (e^x - 3)\,dx$$

$$= -\Big[e^x - 3x\Big]_0^{\log 3} + \Big[e^x - 3x\Big]_{\log 3}^2$$

$$= -\big\{(3 - 3\log 3) - 1\big\} + \big\{(e^2 - 6) - (3 - 3\log 3)\big\}$$

$$= e^2 + 6\log 3 - 11$$