１５５．不定積分⑥

（1）$\dfrac{1}{3}\sin^3 x-\dfrac{1}{5}\sin^5 x+C$　（2）$\tan x+\dfrac{1}{\cos x}+C$　（3）$\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

（4）$x-\log|1-e^x|+C$　（C はいずれも積分定数）

次の不定積分を求めよ。

（1）$\displaystyle\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^2 x\cos^2 x\cos x\,dx=\int\sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$$=\int\left(\sin^2 x\cos x-\sin^4 x\cos x\right)dx=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

置換積分せずに

$\displaystyle\int\sin^n x\cos x\,dx=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x+C$，$\displaystyle\int\cos^n x\sin x\,dx=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x+C$

であることは積極的に使えるようにしましょう。

（2）$\displaystyle\int\frac{1}{1-\sin x}dx=\int\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$　…①

ここで，$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C_1$

$\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ については，$\cos x=t$ とおくと $-\sin x dx=dt$ であるから

$\displaystyle\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{t}+C_2=\frac{1}{\cos x}+C_2$

よって ①$\displaystyle=\tan x+\frac{1}{\cos x}+C$

（3）$\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

$\displaystyle I=\int e^x\cos x\,dx$ とおくと

$\displaystyle I=\int(e^x)'\cos x\,dx=e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\,dx=e^x\cos x+\int(e^x)'\sin x\,dx$

$\displaystyle=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+e^x\sin x-I$

よって $2I=e^x(\sin x+\cos x)$ より $\displaystyle I=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

〔別解〕

$$\left(e^x \sin x\right)' = e^x \sin x + e^x \cos x \quad \cdots ①$$

$$\left(e^x \cos x\right)' = e^x \cos x - e^x \sin x \quad \cdots ②$$

①＋②より $\left(e^x \sin x\right)' + \left(e^x \cos x\right)' = 2e^x \cos x \iff e^x \cos x = \dfrac{1}{2}\left\{\left(e^x \sin x\right)' + \left(e^x \cos x\right)'\right\}$

よって $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

$e^x \cos x$ の積分を求めるために，$e^x \sin x$ を一緒に考えるという点がうまいですね。

（4）$\displaystyle\int \frac{1}{1-e^x} dx = \int \frac{1-e^x+e^x}{1-e^x} dx = \int \left(1 + \frac{e^x}{1-e^x}\right) dx = \int 1 dx - \int \frac{-e^x}{1-e^x} dx = x - \log|1-e^x| + C$

〔別解〕

$1-e^x = t$ とおくと $-e^x dx = dt$ より $dx = -\dfrac{1}{e^x} dt = -\dfrac{1}{1-t} dt$

よって $\displaystyle\int \frac{1}{1-e^x} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{1-t}\right) dt = \int \frac{1}{(t-1)t} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right) dt$

$$= \log|t-1| - \log|t| + C$$

$$= \log|(1-e^x)-1| - \log|1-e^x| + C$$

$$= \log|-e^x| + \log|1-e^x| + C$$

$$= \log e^x + \log|1-e^x| + C$$

$$= x - \log|1-e^x| + C$$