１５３．不定積分④

（1）$x\log x - x + C$　（2）$2xe^{3x} - \dfrac{2}{3}e^{3x} + C$　（3）$(e^x+1)\log(e^x+1) - e^x + C$

（4）$-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x + \dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$　（C はいずれも積分定数）

次の不定積分を求めよ。

（1）$\displaystyle\int \log x\,dx = \int (x)'\log x\;dx$

$$= x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= x\log x - \int 1\,dx$$

$$= x\log x - x + C$$

不定積分の部分積分をする際，積分定数 C をどの段階で付けるべきなのでしょうか。

部分積分の公式は，そもそも次のように積の微分法から導かれました。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \iff f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

の両辺を積分して $\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ …（＊）を得ます。

（＊）の段階で，積分定数 C が本来付いて然るべきではあるのですが，

最終的に１つにまとめる定数であり，まだ計算すべき積分が残っていますので，

この段階では書かないのが普通です。

不定積分の目的は，（定数の違いを気にせず）原始関数を求めることにありますから

その過程においての余計（というより面倒）な表記は省略しています。

本問の結果 $\displaystyle\int \log x\,dx = x(\log x - 1) + C$ は公式として記憶に値します。

（2）$\displaystyle\int 6xe^{3x}\,dx = 6\int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx$

$$= 6\left(x\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}dx\right)$$

$$= 2xe^{3x} - 6\cdot\frac{1}{9}e^{3x} + C$$

$$= 2xe^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x} + C$$

(3) $\displaystyle\int e^x \log(e^x+1)\,dx = \int (e^x+1)' \log(e^x+1)\,dx$

$$= (e^x+1)\log(e^x+1) - \int (e^x+1)\cdot\frac{1}{e^x+1}\cdot e^x\,dx$$

$$= (e^x+1)\log(e^x+1) - \int e^x\,dx$$

$$= (e^x+1)\log(e^x+1) - e^x + C$$

１行目の積分において， $e^x=(e^x+1)'$ と解釈しているのは，

２行目の後半の積分を約分によって簡単な式にするためのテクニックです。

(4) $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,dx = \int x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' dx$

$$= x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$