１５２．不定積分③

（1） $\dfrac{1}{6(6x+7)\sqrt[3]{6x+7}}+C$　（2） $\dfrac{27}{5}x^5-\dfrac{27}{2}x^4+12x^3-4x^2+C$　（3） $-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{2(x-1)^2}+C$

（4） $\dfrac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}-\dfrac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+C$　（5） $\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3 x+C$

（6） $\log|\log x+1|-\dfrac{1}{\log x+1}+C$　（C はいずれも積分定数）

次の不定積分を求めよ。

（1） $\displaystyle\int\sqrt[3]{6x+7}\,dx=\int(6x+7)^{\frac{1}{3}}\,dx=\frac{1}{6}(6x+7)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{1}{6(6x+7)\sqrt[3]{6x+7}}+C$

（2） $\displaystyle\int x(3x-2)^3\,dx=\int(27x^4-54x^3+36x^2-8x)\,dx=\frac{27}{5}x^5-\frac{27}{2}x^4+12x^3-4x^2+C$

（3） $\displaystyle\int\frac{x+2}{(x-1)^3}\,dx=\int\frac{(x-1)+3}{(x-1)^3}\,dx=\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int\frac{3}{(x-1)^3}\,dx=\int(x-1)^{-2}\,dx+3\int(x-1)^{-3}\,dx$

$\displaystyle=-(x-1)^{-1}-\frac{3}{2}(x-1)^{-2}+C=-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+C$

（4） $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx$

$x+2=t$ とおくと $dx=dt$ であり

$\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx=\int(t-2)\sqrt{t}\,dx=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

$\displaystyle=\frac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}-\frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+C$

（5） $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int(1+\tan^2 x)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx+\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ …（＊）

ここで，$\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C_1$

$\displaystyle\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ は $\tan x=t$ とおくと $\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx=dt$ であるから

$\displaystyle\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3+C_2=\frac{1}{3}\tan^3 x+C_2$

よって （＊）$\displaystyle=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

(6) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2}\,dx$

$\log x = t$ とおくと $\dfrac{1}{x}dx = dt$ であり

$$\int \frac{\log x}{x(\log x-1)^2}\,dx = \int \frac{t}{(t-1)^2}\,dt$$

$t-1=s$ とおくと $dt = ds$ であり

$$\int \frac{t}{(t-1)^2}\,dt = \int \frac{s+1}{s^2}\,ds = \int\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}\right)ds = \log|s| - \frac{1}{s} + C$$

$$= \log|t+1| - \frac{1}{t+1} + C = \log|\log x+1| - \frac{1}{\log x+1} + C$$