

150. 接線の方程式④

$$(1) y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) y = 2x \quad (3) y = \frac{1}{e^2}x \quad (4) y = 2e^2x$$

次の関数のグラフの接線で、与えられた点を通るものの方程式を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x}$, $(-2, 0)$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{とおくと} \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = f(x) \text{ 上の点 } (t, \sqrt{t}) \text{ における接線の方程式は } y - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$$

これが $(-2, 0)$ を通るとき

$$0 - \sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(-2 - t) \Leftrightarrow -2t = -2 - t \Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{よって、求める接線の方程式は } y - \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



接線の問題は、大きく分けて2つの種類があります。

A：曲線上の点で接線を引く

B：曲線上にない点から接線を引く

いずれも接点を設定して計算していくのがポイントになります。

Aの場合は、そもそも接点が主役になっているのでスムーズですが、

Bの場合は、先に自分で接点を設定しないといけないので難易度が高くなります。

(2) $y = \frac{2x}{x+1}$, $(1, 2)$

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \quad \text{とおくと} \quad f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$y = f(x) \text{ 上の点 } \left(t, \frac{2t}{t+1}\right) \text{ における接線の方程式は } y - \frac{2t}{t+1} = \frac{2}{(t+1)^2}(x - t)$$

これが $(1, 2)$ を通るとき

$$2 - \frac{2t}{t+1} = \frac{2}{(t+1)^2}(1 - t) \Leftrightarrow (t+1)^2 - t(t+1) = 1 - t \Leftrightarrow t = 0$$

$$\text{よって、求める接線の方程式は } y - \frac{2 \cdot 0}{0+1} = \frac{2}{(0+1)^2}(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x$$

(3) $y = \log x - 1, (0, 0)$

$$f(x) = \log x - 1 \text{ とおくと } f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = f(x) \text{ 上の点 } (t, \log t - 1) \text{ における接線の方程式は } y - (\log t - 1) = \frac{1}{t}(x - t)$$

これが $(0, 0)$ を通るとき

$$0 - (\log t - 1) = \frac{1}{t}(0 - t) \Leftrightarrow -\log t + 1 = -1 \Leftrightarrow t = e^2$$

$$\text{よって, 求める接線の方程式は } y - (\log e^2 - 1) = \frac{1}{e^2}(x - e^2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{e^2}x$$

(4) $y = e^{2x+1}, (0, 0)$

$$f(x) = e^{2x+1} \text{ とおくと } f'(x) = 2e^{2x+1}$$

$$y = f(x) \text{ 上の点 } (t, e^{2t+1}) \text{ における接線の方程式は } y - e^{2t+1} = 2e^{2t+1}(x - t)$$

これが $(0, 0)$ を通るとき

$$0 - e^{2t+1} = 2e^{2t+1}(0 - t) \Leftrightarrow -e^{2t+1} = -2te^{2t+1} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, 求める接線の方程式は } y - e^{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = 2e^{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} \left(x - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow y = 2e^2 x$$