１４１．関数の極限

(1) 2	(2) $\dfrac{5}{3}$	(3) 1	(4) -2	(5) 1	(6) $\dfrac{1}{2}$

次の極限を求めよ。

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=2$$

(2) $$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{5}{3}$$

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+2}{x+3}=1$$

(4) $$\lim_{x\to-\infty}(x+2)\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$$

$x=-t$ とおくと $x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ であり

$$\lim_{x\to-\infty}(x+2)\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=\lim_{t\to\infty}(-t+2)\left(\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2-2}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}(-t+2)\cdot\frac{\left(\sqrt{t^2+2}-\sqrt{t^2-2}\right)\left(\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2}\right)}{\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}(-t+2)\cdot\frac{4}{\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4(-t+2)}{\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t^2-2}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\left(-1+\dfrac{2}{t}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{t^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{t^2}}}$$

$$=\frac{-4}{1+1}$$

$$=-2$$

$x\to-\infty$ のときの極限は，$\sqrt{x^2}=-x$ であることを失念するミスが多発します。

平方根が絡んでいる場合は，$x=-t$ と置き換えて $t\to\infty$ についての極限を考えると安全です。

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{\sin 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}+\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{2}{5}+\dfrac{\sin 3x}{3}\cdot\dfrac{5}{\sin 5x}\cdot\dfrac{3}{5}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}}$$

$$=1$$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\cos x)}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^4\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=1^4\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ は，応用問題では基本極限として構わないでしょう。