１４０．無限級数

(1) 1　(2) $\frac{1}{3}$　(3) $\frac{4}{5}$　(4) $\frac{3}{2}$　(5) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$　(6) $\frac{2}{3}$

次の無限級数の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ とおく。

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$ とおく。

$$S_n=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-1\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

（6） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot0+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot1+\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot0+\cdots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

無限級数の和については，「数列の第 n 部分和の極限」として定義されています。

そのため，計算するときにはまず第 n 部分和を求め，その上で $n\to\infty$ の極限をとります。

例外として，無限等比級数の和は，公比 r が $|r|<1$ を満たしていれば収束することがわかっていますので，第 n 部分和を求めることなく直接和を求めます。