

### 133. 媒介変数表示②

(1) 原点中心, 半径 2 の円      (2) 原点中心, 半径  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$  の円

(3)  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  中心, 半径  $\frac{1}{2}$  の円      (4) 双曲線  $x^2 - y^2 = 1$

次の点  $P(x, y)$  は, どのような曲線を描くか求めよ。

(1)  $x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$  に  $\cos\theta = \frac{x}{2}, \sin\theta = \frac{y}{2}$  を代入して

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$$

よって, 原点中心, 半径 2 の円。

(2)  $x = 2\sin\theta + \cos\theta, y = \sin\theta - 2\cos\theta$

$$x = 2\sin\theta + \cos\theta \quad \cdots\text{①}$$

$$y = \sin\theta - 2\cos\theta \quad \cdots\text{②}$$

$$\text{①} - \text{②} \times 2 \text{ より } x - 2y = 4\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{4}(x - 2y) \quad \cdots\text{③}$$

$$\text{①} \times 2 + \text{②} \text{ より } 2x + y = 4\sin\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{4}(2x + y) \quad \cdots\text{④}$$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$  に③, ④を代入して

$$\left\{\frac{1}{4}(x - 2y)\right\}^2 + \left\{\frac{1}{4}(2x + y)\right\}^2 = 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{16}{5}$$

よって, 原点中心, 半径  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$  の円。

(3)  $x = \frac{1}{1+t^2}, y = \frac{t}{1+t^2}$

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad \cdots\text{①}, \quad y = \frac{t}{1+t^2} \quad \cdots\text{②}$$

$$\text{①}, \text{②} \text{ より } y = tx \quad \cdots\text{③}$$

①より  $x \neq 0$  であり,

$$\text{③} \Leftrightarrow t = \frac{y}{x} \text{ を①に代入して}$$

$$x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

よって、 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  中心、半径  $\frac{1}{2}$  の円。

$$(4) \quad x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \dots \textcircled{1}, \quad y = \frac{2t}{1-t^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } x + y = \frac{1+t^2+2t}{1-t^2} = \frac{(1+t)^2}{(1+t)(1-t)} = \frac{1+t}{1-t} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } x - y = \frac{1+t^2-2t}{1-t^2} = \frac{(1-t)^2}{(1+t)(1-t)} = \frac{1-t}{1+t} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } x + y = \frac{1}{x - y} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

よって、双曲線  $x^2 - y^2 = 1$