１２８．空間ベクトルの内積

(1)(ｉ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$　(ⅱ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-28$，$\theta=\pi$　(ⅲ) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{6}$，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$
(2) $(\pm 6,\ \pm 6,\ \pm 3)$　(3) $\cos\alpha=\dfrac{2}{3},\ \cos\beta=-\dfrac{1}{3},\ \cos\gamma=-\dfrac{2}{3}$

次の問いに答えよ。

(1) 次の２つのベクトルについて，内積とそのなす角θを求めよ。

(ｉ) $\vec{a}=(3,\ 5,\ 2),\ \vec{b}=(-3,\ 1,\ 2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(3,\ 5,\ 2)\cdot(-3,\ 1,\ 2)=-9+5+4=0$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(ⅱ) $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3),\ \vec{b}=(-4,\ -2,\ -6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(2,\ 1,\ 3)\cdot(-4,\ -2,\ -6)=-8-2-18=-28$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-28}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-6)^2}}=\frac{-28}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=-1$$

よって　$\theta=\pi$

(ⅲ) $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1),\ \vec{b}=\left(1,\ \sqrt{6},\ -1\right)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(1,\ -1,\ 1)\cdot\left(1,\ \sqrt{6},\ -1\right)=1-\sqrt{6}-1=-\sqrt{6}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+\sqrt{6}^2+(-1)^2}}=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{8}}=-\frac{1}{2}$$

よって　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

(2) 2つのベクトル $\vec{a}=(1,-2,2)$, $\vec{b}=(2,3,-10)$ の両方に垂直で，大きさが9であるベクトルを求めよ。

求めるベクトルを $\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=(1,-2,2)\cdot(x,\ y,\ z)=x-2y+2z=0$ …①

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=(2,3,-10)\cdot(x,\ y,\ z)=2x+3y-10z=0$ …②

$|\vec{p}|=9$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=81$ …③

これを解くと $x=\pm6,\ y=\pm6,\ z=\pm3$

よって，求めるベクトルは $(\pm6,\pm6,\pm3)$

(3) $\vec{a}=(2,-1,-2)$ が $x,\ y,\ z$ 軸の正の向きとなす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とするとき，

$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ の値を求めよ。

x 軸の正の向きの単位ベクトルは $\overrightarrow{e_x}=(1,0,0)$ より

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_x}}{|\vec{a}||\overrightarrow{e_x}|}=\frac{(2,-1,-2)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot1}=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$$

y 軸の正の向きの単位ベクトルは $\overrightarrow{e_y}=(0,1,0)$ より

$$\cos\beta=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_y}}{|\vec{a}||\overrightarrow{e_y}|}=\frac{(2,-1,-2)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot1}=\frac{-1}{\sqrt{9}}=-\frac{1}{3}$$

z 軸の正の向きの単位ベクトルは $\overrightarrow{e_z}=(0,0,1)$ より

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_x}}{|\vec{a}||\overrightarrow{e_x}|}=\frac{(2,-1,-2)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot1}=\frac{-2}{\sqrt{9}}=-\frac{2}{3}$$