１２７．垂直な単位ベクトル（空間）

(1) $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \mp\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ （複号同順）　(2) $\left(\pm\dfrac{2}{3}, \pm\dfrac{1}{3}, \mp\dfrac{2}{3}\right)$ （複号同順）

(3) $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0, \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ （複号同順）　(4) $\left(\pm\dfrac{3}{5}, \pm\dfrac{4}{5}, 0\right)$ （複号同順）

(5) $\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}, \mp\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, \pm\dfrac{5\sqrt{2}}{6}\right)$ （複号同順）　(6) $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ （複号同順）

次の２つのベクトルに垂直な単位ベクトルを求めよ。

(1) $\vec{a}=(1, 3, 7)$, $\vec{b}=(-2, 1, 0)$

求めるベクトルを $\vec{e}=(x, y, z)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=(1, 3, 7)\cdot(x, y, z)=x+3y+7z=0$ …②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=(-2, 1, 0)\cdot(x, y, z)=-2x+y=0$ …③

①，②，③より $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$z=\mp\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ （複号同順）

よって，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \mp\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ （複号同順）

〔別解〕

$\vec{b}=(-2, 1, 0)$ に垂直なベクトルとして $\vec{p}=(1, 2, z)$ がとれる。

$\vec{a}\perp\vec{p}$ より $\vec{a}\cdot\vec{p}=(1, 3, 7)\cdot(1, 2, z)=1+6+7z=0$ 　よって $z=-1$

したがって $\vec{p}=(1, 2, -1)$ であり，$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

よって，求める垂直な単位ベクトルは，逆向きにも注意して

$\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ より $\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \mp\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ （複号同順）

(2) $\vec{a}=(0,\ 2,\ 1),\ \vec{b}=(2,\ -2,\ 1)$

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=(0,\ 2,\ 1)\cdot(x,\ y,\ z)=2y+z=0$ …②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=(2,\ -2,\ 1)\cdot(x,\ y,\ z)=2x-2y+z=0$ …③

①，②，③より $x=\pm\dfrac{2}{3},\ y=\pm\dfrac{1}{3},\ z=\mp\dfrac{2}{3}$ （複号同順）

よって，$\left(\pm\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{1}{3},\mp\dfrac{2}{3}\right)$ （複号同順）

〔別解〕

$\vec{a}=(0,\ 2,\ 1)$ に垂直なベクトルとして $\vec{p}=(x,1,-2)$ がとれる。

$\vec{b}\perp\vec{p}$ より $\vec{b}\cdot\vec{p}=(2,\ -2,\ 1)\cdot(x,1,-2)=2x-2-2=0$ よって $x=2$

したがって $\vec{p}=(2,1,-2)$ であり，$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$

よって，求める垂直な単位ベクトルは，逆向きにも注意して

$\pm\dfrac{1}{3}(2,1,-2)$ より $\left(\pm\dfrac{2}{3},\pm\dfrac{1}{3},\mp\dfrac{2}{3}\right)$ （複号同順）

(3) $\vec{a}=(2,\ 3,\ -1),\ \vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=(2,\ 3,\ -1)\cdot(x,\ y,\ z)=2x+3y-z=0$ …②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=(2,\ -1,\ -1)\cdot(x,\ y,\ z)=2x-y-z=0$ …③

①，②，③より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ y=0,\ z=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ （複号同順）

よって，$\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},0,\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ （複号同順）

〔別解〕

$\vec{a}=(2,\ 3,\ -1),\ \vec{b}=(2,\ -1,\ -1)$ に垂直なベクトルとして $\vec{p}=(1,\ 0,\ 2)$ がとれる。

$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって，求める垂直な単位ベクトルは，逆向きにも注意して

$\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 0,\ 2)$ より $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ （複号同順）

（4）$\vec{a}=(4,\ -3,\ 1),\ \vec{b}=(4,\ -3,\ -1)$

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=(4,\ -3,\ 1)\cdot(x,\ y,\ z)=4x-3y+z=0$ …②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=(4,\ -3,\ -1)\cdot(x,\ y,\ z)=4x-3y-z=0$ …③

①，②，③より $x=\pm\dfrac{3}{5},\ y=\pm\dfrac{4}{5},\ z=0$ （複号同順）

よって，$\left(\pm\dfrac{3}{5},\ \pm\dfrac{4}{5},\ 0\right)$ （複号同順）

〔別解〕

$\vec{a}=(4,\ -3,\ 1),\ \vec{b}=(4,\ -3,\ -1)$ に垂直なベクトルとして $\vec{p}=(3,\ 4,\ 0)$ がとれる。

$\left|\vec{p}\right|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$

よって，求める垂直な単位ベクトルは，逆向きにも注意して

$\pm\dfrac{1}{5}(3,\ 4,\ 0)$ より $\left(\pm\dfrac{3}{5},\ \pm\dfrac{4}{5},\ 0\right)$ （複号同順）

(5) $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3),\ \vec{b}=(-2,1,\ 2)$

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=(1,\ 2,\ 3)\cdot(x,\ y,\ z)=x+2y+3z=0$ …②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=(-2,1,\ 2)\cdot(x,\ y,\ z)=-2x+y+2z=0$ …③

①，②，③より $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6},\ y=\mp\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\ z=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$ （複号同順）

よって，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6},\mp\dfrac{4\sqrt{2}}{3},\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{6}\right)$ （複号同順）

(6) $\vec{a}=(2,1,\ -3),\ \vec{b}=(1,\ -2,\ 1)$

求めるベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=(2,1,\ -3)\cdot(x,\ y,\ z)=2x+y-3z=0$ …②

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より $\vec{b}\cdot\vec{e}=(1,\ -2,\ 1)\cdot(x,\ y,\ z)=x-2y+z=0$ …③

①，②，③より $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ （複号同順）

よって，$\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ （複号同順）

２つの空間ベクトルに垂直な単位ベクトルを求める計算ですが，
(5)，(6)のように３元の連立方程式を立てて解くのが基本になります。
しかし，(1)，(2)のように成分の一部に０がある場合や
(3)，(4)のように２つの成分が一致（平行でもＯＫ）している場合には
〔別解〕のように面倒な連立方程式を解く計算を回避することもできます。
また，外積という計算を知っている人は，外積を計算することにより
２つのベクトルに垂直なベクトルを１つ作ることができます。
これをこっそり利用しても構いませんが，垂直であることを確認する記述や
大きさを調整すること，逆向きのベクトルの存在を忘れないようにしましょう。