１２６．ベクトル方程式（円）

(1) AB を $1:2$ に内分する点を中心とする半径 2 の円上
(2) AB を $1:3$ に内分する点を中心とする半径 3 の円上
(3) B と原点 O に関して対称な点を B′ として，AB′ を直径とする円上
(4) OA を $1:2$ に内分する点を A′，B と原点 O に関して対称な点を B′ として，A′B′ を直径とする円上
(5) OB の中点を B′ として，B′ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$AB の円上
(6) OA を $2:1$ に外分する点を A′ として，OA′ を直径とする円上

異なる３点 O，A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ と動点 P$(\vec{p})$ について，次のベクトル方程式で表される点 P は

どのような図形上にあるか求めよ。

(1) $\left|3\vec{p}-2\vec{a}-\vec{b}\right|=6 \iff \left|\vec{p}-\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=2$

よって，P は AB を $1:2$ に内分する点を中心とし，半径 2 の円上にある。

(2) $\left|4\vec{p}-3\vec{a}-\vec{b}\right|=12 \iff \left|\vec{p}-\dfrac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}\right|=3$

よって，P は AB を $1:3$ に内分する点を中心とし，半径 3 の円上にある。

(3) $\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{b}\right)=0 \iff \left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left\{\vec{p}-\left(-\vec{b}\right)\right\}=0$

よって，B と原点 O に関して対称な点を B′ とし，P は AB′ を直径とする円上にある。

(4) $\left(3\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{b}\right)=0 \iff \left(\vec{p}-\dfrac{1}{3}\vec{a}\right)\cdot\left\{\vec{p}-\left(-\vec{b}\right)\right\}=0$

よって，OA を $1:2$ に内分する点を A′，B と原点 O に関して対称な点を B′ とし，

P は A′B′ を直径とする円上にある。

(5) $\left|2\vec{p}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \iff \left|\vec{p}-\dfrac{1}{2}\vec{b}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

よって，OB の中点を B′ とし，P は B′ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$AB の円上にある。

(6) $\left|\vec{p}\right|^2=2\vec{a}\cdot\vec{p} \iff \left|\vec{p}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0 \iff \vec{p}\cdot\left(\vec{p}-2a\right)=0$

よって，OA を $2:1$ に外分する点を A′ とし，P は OA′ を直径とする円上にある。