１２５．ベクトル方程式（直線）

(1)(ｉ) $\vec{p}=\dfrac{\vec{b}}{2}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$　（ii） $\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$

（iii） $\vec{p}=\dfrac{\vec{a}}{2}+t\left(\dfrac{-\vec{a}+6\vec{b}}{10}\right)$　（iv） $\left(\vec{p}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$

(2)(ｉ) $\begin{cases}x=2-t\\y=-3+4t\end{cases}$　（ii） $\begin{cases}x=5-t\\y=-4+4t\end{cases}$　（iii） $\begin{cases}x=-3-4t\\y=1+3t\end{cases}$　（iv） $\begin{cases}x=2+5t\\y=4-5t\end{cases}$

次の問いに答えよ。

(1) 平面上の異なる３点 O, A($\vec{a}$), B($\vec{b}$) について，次の直線を表すベクトル方程式を求めよ。

（ｉ）線分 OB の中点を通り，直線 AB に平行な直線

線分 OB の中点 M の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{b}}{2}$，方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ であるから

直線上の点を P($\vec{p}$) として $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{\vec{b}}{2}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$　（t：媒介変数）

（ii）線分 AB を $2:1$ に内分する点を通り，直線 AB に垂直な直線

線分 AB を $2:1$ に内分する点 N の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ であるから

直線上の点を P($\vec{p}$) として $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0 \Leftrightarrow \left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$

（iii）線分 OA の中点と線分 AB を $3:2$ に内分する点を通る直線

線分 OA の中点 M の位置ベクトルは $\dfrac{\vec{a}}{2}$,

線分 AB を $3:2$ に内分する点 N の位置ベクトルは $\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$ であるから

方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}-\dfrac{\vec{a}}{2}=\dfrac{-\vec{a}+6\vec{b}}{10}$ である。

よって，直線上の点を P($\vec{p}$) として $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\dfrac{\vec{a}}{2}+t\left(\dfrac{-\vec{a}+6\vec{b}}{10}\right)$　（t：媒介変数）

$\dfrac{-\vec{a}+6\vec{b}}{10}\,//\left(\vec{a}-6\vec{b}\right)$ ですから，

より簡単に $\vec{p}=\dfrac{\vec{a}}{2}+t\left(\vec{a}-6\vec{b}\right)$ と表すこともできます。

（iv）点 A を中心とする円周上の点 B における接線

接点は B であるから，直線上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ として $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\vec{p}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$

(2) 次の直線の方程式を媒介変数 t を用いて表せ

（ i ）$(2,\ -3)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(-1,\ 4)$

直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $(x,\ y)=(2,\ -3)+t(-1,\ 4)$

よって $\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+4t \end{cases}$

（ ii ）$(5,\ -4)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(-1,\ 4)$

直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $(x,\ y)=(5,\ -4)+t(-1,\ 4)$

よって $\begin{cases} x=5-t \\ y=-4+4t \end{cases}$

（iii）２点 $(-3,1),\ (1,\ -2)$ を通る

方向ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{d}=(-3,1)-(1,\ -2)=(-4,\ 3)$ であるから

直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $(x,\ y)=(-3,1)+t(-4,\ 3)$

よって $\begin{cases} x=-3-4t \\ y=1+3t \end{cases}$

（iv）２点 $(2,\ 4),\ (-3,\ 9)$ を通る

方向ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{d}=(2,\ 4)-(-3,\ 9)=(5,\ -5)$ であるから

直線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると $(x,\ y)=(2,\ 4)+t(5,\ -5)$

よって $\begin{cases} x=2+5t \\ y=4-5t \end{cases}$

$(5,\ -5)\,//\,(1,\ -1)$ ですから，

より簡単に $\begin{cases} x=2+t \\ y=4-t \end{cases}$ と表すこともできます。