１２３．垂直な単位ベクトル（平面）

（1） $\vec{e}=(0,\ \pm1)$　（2） $\vec{e}=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$　（3） $\vec{e}=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$

（4） $\vec{e}=\left(\pm\dfrac{4}{5},\ \mp\dfrac{3}{5}\right)$　（5） $\vec{e}=\left(\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10},\ \pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$　（6） $\vec{e}=\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{10},\ \mp\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\right)$

(2)～(6)はいずれも複号同順

次のベクトルに垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

（1） $\vec{a}=(1,\ 0)$

$\vec{e}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{e}$ は単位ベクトルであるから $|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2}=1$ すなわち $x^2+y^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=0 \Leftrightarrow (1,\ 0)\cdot(x,\ y)=0 \Leftrightarrow x=0$ …②

①かつ②より $(x,\ y)=(0,\ \pm1)$　よって $\vec{e}=(0,\ \pm1)$

（2） $\vec{a}=\left(1,\ -\sqrt{3}\right)$

$\vec{e}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{e}$ は単位ベクトルであるから $|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2}=1$ すなわち $x^2+y^2=1$ …①

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より $\vec{a}\cdot\vec{e}=0 \Leftrightarrow \left(1,\ -\sqrt{3}\right)\cdot(x,\ y)=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{3}y=0$ …②

①かつ②より $(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）　よって $\vec{e}=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）

（3） $\vec{a}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\vec{e}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{e}$ は単位ベクトルであるから $|\vec{e}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2}=1$ すなわち $x^2+y^2=1$ …①

$\vec{a} \perp \vec{e}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \iff \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (x,\ y) = 0 \iff -x + \sqrt{3}y = 0$　…②

①かつ②より　$(x,\ y) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)$（複号同順）　よって　$\vec{e} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm\frac{1}{2}\right)$（複号同順）

（4）$\vec{a} = (-3,\ -4)$

$\vec{e} = (x,\ y)$　とおく。

$\vec{e}$は単位ベクトルであるから　$|\vec{e}| = 1$　より　$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$　すなわち　$x^2 + y^2 = 1$　…①

$\vec{a} \perp \vec{e}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \iff (-3,\ -4) \cdot (x,\ y) = 0 \iff -3x - 4y = 0$　…②

①かつ②より　$(x,\ y) = \left(\pm\frac{4}{5},\ \mp\frac{3}{5}\right)$（複号同順）　よって　$\vec{e} = \left(\pm\frac{4}{5},\ \mp\frac{3}{5}\right)$（複号同順）

（5）$\vec{a} = (-3,\ 1)$

$\vec{e} = (x,\ y)$　とおく。

$\vec{e}$は単位ベクトルであるから　$|\vec{e}| = 1$　より　$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$　すなわち　$x^2 + y^2 = 1$　…①

$\vec{a} \perp \vec{e}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \iff (-3,\ 1) \cdot (x,\ y) = 0 \iff -3x + y = 0$　…②

①かつ②より　$(x,\ y) = \left(\pm\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \pm\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$（複号同順）　よって　$\vec{e} = \left(\pm\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \pm\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$（複号同順）

（6）$\vec{a} = (7,\ 1)$

$\vec{e} = (x,\ y)$　とおく。

$\vec{e}$は単位ベクトルであるから　$|\vec{e}| = 1$　より　$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$　すなわち　$x^2 + y^2 = 1$　…①

$\vec{a} \perp \vec{e}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \iff (7,\ 1) \cdot (x,\ y) = 0 \iff 7x + y = 0$　…②

①かつ②より　$(x,\ y) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{10},\ \mp\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$（複号同順）　よって　$\vec{e} = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{10},\ \mp\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)$（複号同順）

解答のように連立方程式を立て，垂直な単位ベクトルを求めることもできますが，

平面ベクトルであれば，(a, b) に垂直なベクトルの１つは $(b, -a)$ となりますので，

単位ベクトル（大きさが１）であること，逆向きもあること（－１倍）にも注意して

求めるベクトルは $\pm\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ であることがわかります。

実戦的には「x 成分と y 成分を入れ替え，どちらかの符号を変える」という操作で

垂直なベクトルの１つを得ていくのが最速でしょう。