１２１．漸化式②

（1）$a_n=2n^3-4n^2+2n+1$　（2）$a_n=\dfrac{3^{n+1}-7}{2}$　（3）$a_n=\dfrac{1}{6}\left\{7\cdot 2^{n-1}-(-4)^{n-1}\right\}$　（4）$a_n=-2(n-3)4^{n-2}$

次の漸化式を解け。

（1）$a_{n+1}=a_n+6n^2-2n$，$a_1=1$

$a_{n+1}=a_n+6n^2-2n \iff a_{n+1}-a_n=6n^2-2n$

よって，a_n の階差数列が $6n^2-2n$ である。

したがって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2-2k)$$

$$=1+6\cdot\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}-2\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

$$=1+(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)-(n-1)\cdot n$$

$=2n^3-4n^2+2n+1$　　これは $n=1$ でも成り立つ。

よって $a_n=2n^3-4n^2+2n+1$

（2）$a_{n+1}=a_n+3^{n+1}$，$a_1=1$

$a_{n+1}=a_n+3^{n+1} \iff a_{n+1}-a_n=3^{n+1}$

よって，a_n の階差数列が 3^{n+1} である。

したがって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k+1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}9\cdot 3^{k-1}$$

$$=1+\frac{9(1-3^{n-1})}{1-3}$$

$=\dfrac{3^{n+1}-7}{2}$　　これは $n=1$ でも成り立つ。

よって $a_n=\dfrac{3^{n+1}-7}{2}$

（3） $a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0$， $a_1=1,\ a_2=3$

$a_{n+2}+2a_{n+1}-8a_n=0$ は次のように２通りに変形できる。

$$a_{n+2}+4a_{n+1}=2\left(a_{n+1}+4a_n\right)\ \cdots①$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-4\left(a_{n+1}-2a_n\right)\ \cdots②$$

①より $a_{n+1}+4a_n=\left(a_2+4a_1\right)\cdot 2^{n-1}=7\cdot 2^{n-1}\ \cdots③$

②より $a_{n+1}-2a_n=\left(a_2-2a_1\right)\cdot(-4)^{n-1}=(-4)^{n-1}\ \cdots④$

③－④より $6a_n=7\cdot 2^{n-1}-(-4)^{n-1}$

したがって $a_n=\dfrac{1}{6}\left\{7\cdot 2^{n-1}-(-4)^{n-1}\right\}$

$a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ は，２次方程式 $x^2=px+q$ の２解 $\alpha,\ \beta$（$\alpha\neq\beta$）を用いて

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta\left(a_{n+1}-\alpha a_n\right),\quad a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha\left(a_{n+1}-\beta a_n\right)$$

と２通りに変形できますが，$\alpha,\ \beta$ を求める過程は解答に記述しなくて構いません。

$\alpha=\beta$ のときは，これらは同一の式になりますので，途中から解き方が変わります。

それは(4)で確認してください。

（4） $a_{n+2}=8a_{n+1}-16a_n$， $a_1=1,\ a_2=2$

$a_{n+2}=8a_{n+1}-16a_n$ は次のように変形できる。

$$a_{n+2}-4a_{n+1}=4\left(a_{n+1}-4a_n\right)\ \cdots①$$

①より $a_{n+1}-4a_n=\left(a_2-4a_1\right)\cdot 4^{n-1}=-2\cdot 4^{n-1} \Leftrightarrow a_{n+1}=4a_n-2\cdot 4^{n-1}\ \cdots②$

②の両辺を 4^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{4a_n}{4^{n+1}}-\frac{2\cdot 4^{n-1}}{4^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{a_n}{4^n}-\frac{1}{8}\ \cdots③$$

③より $\dfrac{a_n}{4^n}$ は初項 $\dfrac{a_1}{4^1}=\dfrac{1}{4}$，公差 $-\dfrac{1}{8}$ の等差数列である。

よって $\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{4}+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{-n+3}{8}=-\dfrac{n-3}{8}$

したがって $a_n=-\dfrac{n-3}{8}\cdot 4^n=-2(n-3)4^{n-2}$