１２０．漸化式①

(1) $a_n=-2n+5$	(2) $a_n=3(-2)^{n-1}$	(3) $a_n=3-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
(4) $a_n=3^{n-1}+n+1$	(5) $a_n=-2^{n-1}+n^2+1$	(6) $a_n=\frac{7}{3}\cdot 8^{n-1}-\frac{1}{6}\cdot 2^n$

次の漸化式を解け。

(1) $a_{n+1}=a_n-2,\ a_1=3$

漸化式より，数列$\{a_n\}$は初項3，公差-2の等差数列である。

よって　$a_n=3+(n-1)\cdot(-2)=-2n+5$

(2) $a_{n+1}=-2a_n$，$a_1=3$

漸化式より，数列$\{a_n\}$は初項3，公比-2の等比数列である。

よって　$a_n=3(-2)^{n-1}$

(3) $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2,\ a_1=1$

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2 \Leftrightarrow a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$　であるから

数列$\{a_n-3\}$は，初項　$a_1-3=-2$，公比$\frac{1}{3}$の等比数列である。

よって　$a_n-3=-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Leftrightarrow a_n=3-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(4) $a_{n+1}=3a_n-2n-1,\ a_1=3$

$a_{n+1}=3a_n-2n-1 \Leftrightarrow a_{n+1}-\{(n+1)+1\}=3\{a_n-(n+1)\}$　であるから

数列$\{a_n-(n+1)\}$は，初項　$a_1-(1+1)=1$，公比3の等比数列である。

よって　$a_n-(n+1)=1\cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow a_n=3^{n-1}+n+1$

〔別解〕

$a_{n+1}=3a_n-2n-1$　…①，　$a_{n+2}=3a_{n+1}-2(n+1)-1$　…②

②－①より　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)-2$　であり，$a_{n+1}-a_n=b_n$　とおくと

$b_{n+1}=3b_n-2 \Leftrightarrow b_{n+1}-1=3(b_n-1)$ であるから

数列$\{b_n-1\}$は，初項 $b_1-1=a_2-a_1-1=6-3-1=2$，公比3の等比数列である。

よって $b_n-1=2\cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow b_n=2\cdot 3^{n-1}+1 \Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=2\cdot 3^{n-1}+1$ である。

a_nの階差数列の一般項が $2\cdot 3^{n-1}+1$ であるから

$n \geqq 2$のとき $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(2\cdot 3^{k-1}+1\right)=3+\dfrac{2(1-3^{n-1})}{1-3}+(n-1)=3+3^{n-1}-1+n-1=3^{n-1}+n+1$

（これは$n=1$でも成り立つ）

よって，$a_n=3^{n-1}+n+1$

（5）$a_{n+1}=2a_n-n^2+2n,\ a_1=1$

$a_{n+1}=2a_n-n^2+2n \Leftrightarrow a_{n+1}-\left\{(n+1)^2+1\right\}=2\left\{a_n-(n^2+1)\right\}$ であるから

数列$\left\{a_n-(n^2+1)\right\}$は，初項 $a_1-(1^2+1)=-1$，公比2の等比数列である。

よって $a_n-(n^2+1)=-1\cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow a_n=-2^{n-1}+n^2+1$

（6）$a_{n+1}=8a_n+2^n$，$a_1=2$

漸化式の両辺を2^{n+1}で割って，$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=4\cdot\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと $b_{n+1}=4b_n+\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow b_{n+1}+\dfrac{1}{6}=4\left(b_n+\dfrac{1}{6}\right)$ であるから

$\left\{b_n+\dfrac{1}{6}\right\}$は，初項 $b_1+\dfrac{1}{6}=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{6}$，公比 4 の等比数列である。

よって $b_n+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{6}\cdot 4^{n-1} \Leftrightarrow b_n=\dfrac{7}{6}\cdot 4^{n-1}-\dfrac{1}{6}$

したがって $a_n=2^n\cdot\left(\dfrac{7}{6}\cdot 4^{n-1}-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{7}{3}\cdot 8^{n-1}-\dfrac{1}{6}\cdot 2^n$

漸化式を解く問題の中でも頻出のものは，

　隣接２項間の漸化式であれば，$a_{n+1}=a_n=x$

　隣接３項間の漸化式であれば，$a_{n+2}=x^2$，$a_{n+1}=x$，$a_n=1$

とおいて，特性方程式とよばれる方程式の解を利用して変形して解きます。

この方程式の妥当性を高校生でも説明できなくはないのですが，問題の本質とは

別の議論が長々と続くことになってしまいます。

実際，高校生の答案としては特性方程式を解く過程まで記述する必要はなく，

余白で特性方程式を解き，変形した結果をいきなり書いて構いません。

(4)，(5)のような問題では，離散型変数の解析方法である「差分」をしていくのが原則で，

普遍的な方法ではあるのですが，これだと別解のように階差数列を経由することになり，

一般項を求めるための計算はかなり面倒ですし，間違えやすいと言えます。

一度の変形で等比数列に帰着できるようにする解答の方法をマスターしましょう。

(4)では，答案には書いてありませんが，次のように変形に必要な式を求めています。

$a_{n+1}=3a_n-2n-1$ が $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ と変形できたとします。

このとき，$a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta$ より係数を比較して

$\begin{cases}-2\alpha=-2\\ \alpha-2\beta=-1\end{cases}$ より $\alpha=1,\ \beta=1$

したがって $a_{n+1}-\{(n+1)+1\}=3\{a_n-(n+1)\}$ と変形できます。

また，等差・等比の混合数列のような漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq1,\ q\neq0)$ については

その一般項が $a_n=\dfrac{q}{1-p}+\left(a_1-\dfrac{q}{1-p}\right)p^{n-1}$ になることは，記憶に値します。

もちろん，これを使うからには，そもそも漸化式を解ける実力があることが前提です。