１１８．Σの計算

（1）465　（2）2870　（3）3025　（4）3279

（5）$\dfrac{n\left(6n^2+3n-1\right)}{2}$　（6）$\dfrac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$　（7）$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

次の和を求めよ。

（1）$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} k = \frac{30(30+1)}{2} = 465$

（2）$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{20(20+1)(2\cdot 20+1)}{6} = 2870$

（3）$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^3 = \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2 = 3025$

（4）$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 3^k = \sum_{k=1}^{7} 3\cdot 3^{k-1} = \frac{3(1-3^7)}{1-3} = 3279$

和の記号Σに苦手意識をもつ生徒は，少なくありません。

どんな数列の和になっているのかわからなければ，Σ記号を使わずに書き下して

みることをおすすめします。意外と記号負けしているだけかもしれません。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ ，そして

意外と使いこなせない等比数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ は必須事項です。

（5）$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (9k^2-6k+1)$

$$= 9\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 9\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n}{2}\left\{3(n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 2\right\}$$　（因数分解を目指し，共通因数でくくる）

$$= \frac{n\left(6n^2+3n-1\right)}{2}$$

(6) $(1^2)+(1^2+3^2)+(1^2+3^2+5^2)+\cdots\cdots+(1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}(2m-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}(4m^2-4m+1)\quad\cdots①$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{4\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-4\cdot\frac{k(k+1)}{2}+k\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3}\left\{2(k+1)(2k+1)-6(k+1)+3\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3}\left(4k^2-1\right)\quad\cdots②$$

$$=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{4}{3}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\left\{2n(n+1)-1\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}$$

〔部分的な別解〕

①において $\displaystyle\sum_{m=1}^{k}(4m^2-4m)$

$$=4\sum_{m=1}^{k}(m-1)m$$

$$=4\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{3}\left\{(m-1)m(m+1)-(m-2)(m-1)m\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\left[\left\{\cancel{0\cdot1\cdot2}-(-1)\cdot0\cdot1\right\}+\left\{\cancel{1\cdot2\cdot3}-\cancel{0\cdot1\cdot2}\right\}+\cdots\cdots+\left\{(k-1)k(k+1)-\cancel{(k-2)(k-1)k}\right\}\right]$$

$$=\frac{4}{3}(k-1)k(k+1)$$

であるから，①$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4}{3}(k-1)k(k+1)+k\right\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3}k^3-\frac{k}{3}\right)$　となって②と同じ式を得る。

（7）$\{1\cdot n\}+\{3\cdot(n-1)\}+\{5\cdot(n-2)\}+\cdots+\{(2n-1)\cdot 1\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(n-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2kn-2k^2+2k-n+k-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-n-1\}$　　　　（文字 k について整理）

$=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}1$　　（文字 k 以外は定数扱い）

$=-2\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+3)\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-(n+1)\cdot n$

$=\dfrac{n(n+1)}{6}\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

和が n の式になるときは，できる限り因数分解して答えておきましょう。

また，答えとして得られた式に $n=1$ を代入して成り立つか，検算するとよいでしょう。

やや高度な内容ですが，

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

のような和についての知識があれば，少ない計算量で

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)-\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

などを導くことができます。