１１１．接線の方程式②

（1）$y=2$，$y=-4x-6$　　（2）$y=4$

（3）$y=5x+3,\ \ y=\dfrac{11}{4}x+\dfrac{3}{4}$　　（4）$y=0,\ \ y=32x-96,\ \ y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{4}$

次の関数のグラフの接線で，与えられた点を通るものの方程式を求めよ。

（1）$y=x^2+2x+3,\ (-2,\ 2)$

$f(x)=x^2+2x+3$ とおくと　$f'(x)=2x+2$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+2t+3)=(2t+2)(x-t)\ \Leftrightarrow\ y=(2t+2)x-t^2+3\ \cdots①$$

①が $(-2,\ 2)$ を通るとき

$$2=(2t+2)\cdot(-2)-t^2+3\ \Leftrightarrow\ t^2+4t+3=0\ \Leftrightarrow\ (t+1)(t+3)=0\ \Leftrightarrow\ t=-1,\ -3$$

よって，求める接線は２本あって　$y=2$，$y=-4x-6$

〔別解〕

$y=x^2+2x+3$ は２次関数であり，求める接線は y 軸に平行なものにはならない。

よって，$(-2,\ 2)$ を通る直線の方程式は傾きを m として　$y=m(x+2)+2\ \cdots②$ とおける。

これと放物線の式を連立させて

$$x^2+2x+3=m(x+2)+2\ \Leftrightarrow\ x^2+(2-m)x-2m+1=0\ \cdots③$$

②が放物線の接線となるとき，③は重解をもつ。

③の判別式を D とすると

$$D=(2-m)^2-4\cdot1\cdot(-2m+1)=0$$

$$m(m+4)=0$$

$$m=0,\ -4$$

したがって，求める接線の方程式は　$y=2$，$y=-4x-6$

接線の問題は，特に解法に指示が無ければ接点を中心に計算をしていきます。

別解のやり方でもできますが，３次関数以上になると処理がさらに面倒です。

接点が存在すれば接線も存在するということから接点を大切にしましょう。

（2） $y=x^3+4$, $(0,\ 4)$

$f(x)=x^3+4$ とおくと $f'(x)=3x^2$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+4)=3t^2(x-t) \iff y=3t^2x-2t^3+4 \quad \cdots ①$$

①が $(0, 4)$ を通るとき

$$4=-2t^3+4 \iff t^3=0 \iff t=0$$

よって，求める接線は１本あって　$y=4$

（3） $y=x^3+2x+1$, $(-1,\ -2)$

$f(x)=x^3+2x+1$ とおくと $f'(x)=3x^2+2$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3+2t+1)=(3t^2+2)(x-t) \iff y=(3t^2+2)x-2t^3+1 \quad \cdots ①$$

①が $(-1, -2)$ を通るとき

$$-2=(3t^2+2)\cdot(-1)-2t^3+1 \iff 2t^3+3t^2-1=0 \iff (t+1)(2t^2+t-1)=0 \iff (t+1)^2(2t-1)=0$$

$$t=-1,\ \frac{1}{2}$$

よって，求める接線は２本あって　$y=5x+3$, $y=\dfrac{11}{4}x+\dfrac{3}{4}$

（4） $y=x^3-2x^2$, $(3, 0)$

$f(x)=x^3-2x^2$ とおくと $f'(x)=3x^2-4x$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-2t^2)=(3t^2-4t)(x-t) \iff y=(3t^2-4t)x-2t^3+2t^2 \quad \cdots ①$$

①が $(3, 0)$ を通るとき

$$0=(3t^2-4t)\cdot 3-2t^3+2t^2 \iff 2t^3-11t^2+12t=0 \iff t(t-4)(2t-3)=0 \iff t=0,\ 4,\ \frac{3}{2}$$

よって，求める接線は３本あって　$y=0$, $y=32x-96$, $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{4}$