１０６．定義に従って微分①

導関数の定義に従って，次の関数を微分せよ。

(1)　$y=2x+3$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(x+h)+3\}-(2x+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$$

(2)　$y=4x^2$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8hx+4h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(8x+4h\right)=8x$$

(3)　$y=x^3$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

(4)　$f(x)=x^n$　（$n\in\mathbb{N}$）

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left({}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots\ \cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^n-x^n\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots\ \cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^n\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left({}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_{n-1}xh^{n-1}\right)$$

$$=nx^{n-1}$$