１０３．解と係数の関係②

【１】(1) 2	(2) $\frac{1}{2}$	(3) -4	(4) 3	(5) -7	
【２】(1) 14	(2) 24	(3) $x^3-\frac{7}{12}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}=0$		【３】$a=0,\ b=-2,\ c=-4$	

次の問いに答えよ。

【１】 ３次方程式 $2x^3-4x^2+x+8=0$ の３解をα,β,γ とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{-4}{2}=2$

(2) 解と係数の関係より $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}$

(3) 解と係数の関係より $\alpha\beta\gamma=-\frac{8}{2}=-4$

(4) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2^2-2\cdot\frac{1}{2}=3$

(5) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

$$=3\cdot(-4)+2\cdot\left(3-\frac{1}{2}\right)=-12+5=-7$$

【２】α,β,γ が $\alpha+\beta+\gamma=6,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8,\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=36$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ の値を求めよ。

$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ であるから

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{1}{2}(6^2-8)=14$

(2) $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ。

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ であるから

$\alpha\beta\gamma=\frac{1}{3}\{36-6\cdot(8-14)\}=24$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}, \dfrac{1}{\gamma}$ を解とする x の３次方程式を作れ。

ただし，x^3 の係数は１とする。

$(\alpha x-1)(\beta x-1)(\gamma x-1)=0$ より

$\alpha\beta\gamma x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+(\alpha+\beta+\gamma)x-1=0$

したがって $24x^3-14x^2+6x-1=0$ より

求める方程式は $x^3-\dfrac{7}{12}x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{24}=0$

【３】３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が３つの解 $-2,\ 1-i,\ 1+i$ をもつとき，a, b, c の値を求めよ。

解と係数の関係より

$(-2)+(1-i)+(1+i)=-a$

$(-2)(1-i)+(1-i)(1+i)+(1+i)(-2)=b$

$-2(1-i)(1+i)=c$

したがって $a=0,\ b=-2,\ c=-4$

【３】は次のように出題されることもよくあります。

「実数係数の３次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が $x=-2,\ 1+i$ を解にもつとき，

a, b, c の値と他の解を求めよ。」

解と係数の関係を使った方が簡単で速いのですが，別解として

解と係数の関係を使わずに２つの解を代入し，$x=-2$ の題意乳から１つ，

$x=1+i$ の代入からは実部と虚部がそれぞれ０になるとして２つの a, b, c に関する

式を得て，連立方程式を解くという方法があります。