１０１．対数を含む不等式②

（1）$x<2-\sqrt{7}$　（2）$\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$　（3）$2<x<6-\sqrt{10}$，$6+\sqrt{10}<x$

次の不等式を解け。

（1）$\log_2(1-x)+\log_2(3-x)>1+\log_2 3$

真数条件より $1-x>0$ かつ $3-x>0$　すなわち $x<1$ …①

このとき，

（与式）$\Leftrightarrow \log_2(1-x)(3-x)>\log_2 2+\log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-4x+3)>\log_2 6$

底は 2（>1）であるから

$x^2-4x+3>6 \Leftrightarrow x^2-4x-3>0$ より $x<2-\sqrt{7}$，$2+\sqrt{7}<x$ …②

①かつ②より $x<2-\sqrt{7}$

（2）$\left(\log_3 x\right)^2-\log_9 x^2-2\leqq 0$

真数条件より $x>0$ かつ $x^2>0$　すなわち　$x>0$ …①

このとき，

（与式）$\Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^2-2\log_9 x-2\leqq 0$

$\Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^2-2\cdot\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}-2\leqq 0$

$\Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^2-\log_3 x-2\leqq 0$

$\Leftrightarrow \left(\log_3 x-2\right)\left(\log_3 x+1\right)\leqq 0$

$\Leftrightarrow -1\leqq \log_3 x\leqq 2$

$\Leftrightarrow \log_3 3^{-1}\leqq \log_3 x\leqq \log_3 3^2$

底は 2（>1）であるから $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$ …②

①かつ②より $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$

（3）$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+15)<2\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$

真数条件より　$x^2-8x+15>0$　かつ　$x-2>0$

すなわち　$2<x<3,\ 5<x$　…①

このとき，

（与式）$\Leftrightarrow$　$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+15)<\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2+\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$　$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+15)<\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}(x-2)^2$

底は　$\dfrac{1}{2}$（<1）であるから

$x^2-8x+15>\dfrac{1}{2}(x-2)^2$　$\Leftrightarrow$　$2x^2-16x+30>x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow$　$x^2-12x+26>0$　より　$x<6-\sqrt{10},\ 6+\sqrt{10}<x$　…②

$2<6-\sqrt{10}<3$ であること，および①かつ②より　$2<x<6-\sqrt{10},\ 6+\sqrt{10}<x$