

100. 対数を含む不等式①

(1) $0 < x < 1000$	(2) $0 < x < \frac{1}{9}$	(3) $0 \leq x < \frac{1}{2}$
(4) $2 < x < \frac{10}{3}$	(5) $0 < x \leq 1$	(6) $-1 < x < 3$

次の不等式を解け。

(1) $\log_{10} x < 3$

真数条件より $x > 0$ …①

このとき,

(与式) $\Leftrightarrow \log_{10} x < \log_{10} 10^3$

底は 10 (> 1) であるから $x < 10^3$ …②

①かつ②より $0 < x < 1000$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x > 2$

真数条件より $x > 0$ …①

このとき,

(与式) $\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$

底は $\frac{1}{3}$ (< 1) であるから $x < \left(\frac{1}{3}\right)^2$ …②

①かつ②より $0 < x < \frac{1}{9}$

(3) $\log_3(1-2x) \leq 0$

真数条件より $1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ …①

このとき,

(与式) $\Leftrightarrow \log_3(1-2x) \leq \log_3 1$

底は 3 (> 1) であるから $1-2x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ …②

①かつ②より $0 \leq x < \frac{1}{2}$

$$(4) \log_3(10-3x) < \log_3 2x$$

真数条件より $10-3x > 0$ かつ $2x > 0$

$$\text{すなわち } 0 < x < \frac{10}{3} \dots \textcircled{1}$$

このとき、底は $3 (>1)$ であるから

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow 10-3x < 2x \Leftrightarrow x > 2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{より } 2 < x < \frac{10}{3}$$

$$(5) \log_{\frac{1}{5}}(3-x) \leq \log_{\frac{1}{5}} 2x$$

真数条件より $3-x > 0$ かつ $2x > 0$

$$\text{すなわち } 0 < x < 3 \dots \textcircled{1}$$

このとき、底は $\frac{1}{5} (<1)$ であるから

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow 3-x \geq 2x \Leftrightarrow x \leq 1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{より } 0 < x \leq 1$$

$$(6) \log_2(3-x) < \log_4(2x+18)$$

真数条件より $3-x > 0$ かつ $2x+18 > 0$

$$\text{すなわち } -9 < x < 3 \dots \textcircled{1}$$

このとき、

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_2(3-x) < \frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4} \Leftrightarrow 2\log_2(3-x) < \log_2(2x+18) \Leftrightarrow \log_2(3-x)^2 < \log_2(2x+18)$$

底は $2 (>1)$ であるから

$$(3-x)^2 < 2x+18 \Leftrightarrow x^2-8x-9 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-9) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 9 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{かつ} \textcircled{2} \text{より } -1 < x < 3$$