

98. 対数を含む方程式①

$$(1) x=6 \quad (2) x=7 \quad (3) x=\frac{1}{2} \quad (4) x=9 \quad (5) x=\frac{\log_2 3}{\log_2 3-1} \quad (6) x=11$$

次の方程式を解け。

$$(1) \log_3(x-5)=0$$

$$\text{真数条件より } x-5>0 \Leftrightarrow x>5 \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_3(x-5)=\log_3 1$$

よって $x-5=1$ から $x=6$ これは①を満たす。

$$(2) \log_{\sqrt{2}}(x+1)=6$$

$$\text{真数条件より } x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(x+1)=\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^6$$

よって $x+1=\sqrt{2}^6$ から $x+1=8 \Leftrightarrow x=7$ これは①を満たす。

$$(3) \log_x 4=-2$$

$$\text{底の条件より } x \neq 1, x > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_x 4 = \log_x x^{-2}$$

$$\text{よって } x^{-2}=4 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

①より $x=\frac{1}{2}$ これは①を満たす。

$$(4) \log_3 9x - \log_x 9 = 3$$

$$\text{真数条件より } 9x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_3 9 + \log_3 x - \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2 + \log_3 x - \frac{\log_3 x}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^2$$

よって $x=9$ これは①を満たす。

$$(5) 2^x = 3^{x-1}$$

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 3^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x = (x-1)\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow (1 - \log_2 3)x = -\log_2 3$$

$$\text{よって } x = \frac{-\log_2 3}{1 - \log_2 3} = \frac{\log_2 3}{\log_2 3 - 1}$$

$$(6) \log_2(x-9) + \log_2(x-3) = 4$$

真数条件より $x-9 > 0$ かつ $x-3 > 0$

よって $x > 9$ …①

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow \log_2(x-9)(x-3) = \log_2 2^4$$

$$\text{よって } (x-9)(x-3) = 2^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-11) = 0$$

①より $x = 11$