９４．指数関数を含む不等式

(1) $x \leqq -\dfrac{4}{3}$	(2) $x < -2$	(3) $x \geqq -\dfrac{5}{4}$	(4) $0 < x \leqq \dfrac{1}{6}$	(5) $0 < x < 3$	(6) $-5 < x < 4$

次の不等式を解け。

(1) $27^x \leqq \dfrac{1}{81} \iff 3^{3x} \leqq 3^{-4}$

底は３（>1）であるから

$3x \leqq -4$ より $x \leqq -\dfrac{4}{3}$

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x} \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$

底は$\dfrac{1}{2}$（<1）であるから $5x+4 < 3x$ より $x < -2$

(3) $9 \cdot 3^x \geqq \sqrt[4]{27} \iff 3^{x+2} \geqq 3^{\frac{3}{4}}$

底は３（>1）であるから $x+2 \geqq \dfrac{3}{4}$ より $x \geqq -\dfrac{5}{4}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x} < 1 \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{0}$

底は$\dfrac{1}{2}$（<1）であるから $\dfrac{1}{2} \geqq 3x > 0$ より $0 < x \leqq \dfrac{1}{6}$

(5) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0 \iff (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 < 0 \iff (2^x - 1)(2^x - 8) < 0$

$2^x > 0$ であるから $1 < 2^x < 8 \iff 2^0 < 2^x < 2^3$

底は２（>1）であるから $0 < x < 3$

(6) $4^{x+2} + 8 < 2^{x+8} + 2^{x-1} \iff 16 \cdot (2^x)^2 + 8 < 256 \cdot 2^x + \dfrac{1}{2} \cdot 2^x \iff 32(2^x)^2 + 16 < 512 \cdot 2^x + 2^x$

$\iff 32(2^x)^2 - 513 \cdot 2^x + 16 < 0 \iff (32 \cdot 2^x - 1)(2^x - 16) < 0$

$2^x > 0$ より $\dfrac{1}{32} < 2^x < 16 \iff 2^{-5} < 2^x < 2^4$

底は２（>1）であるから $-5 < x < 4$