

9 3. 指数関数を含む方程式

$$(1) x = -\frac{2}{3} \quad (2) x = 3 \quad (3) x = -4 \quad (4) x = 3 \quad (5) x = 2 \quad (6) x = \log_3 4, \quad y = -\log_3 2$$

次の方程式を解け。

$$(1) 27^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^{-2} \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$(2) 2^{3x-2} = 128 \Leftrightarrow 2^{3x-2} = 2^7 \Leftrightarrow 3x-2=7 \Leftrightarrow x=3$$

$$(3) \sqrt{5^x} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}x} = 5^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -2 \Leftrightarrow x = -4$$

$$(4) 125^{x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{x-6} \Leftrightarrow 5^{3(x-1)} = 5^{-2(x-6)} \Leftrightarrow 3(x-1) = -2(x-6) \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$$

$$(5) 4^x + 2^{x+1} - 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x + 6)(2^x - 4) = 0$$

$$2^x > 0 \text{ より } 2^x = 4$$

$$\text{よって } x = 2$$

$$(6) \begin{cases} 3^{x+y} = 2 & \dots \text{①} \\ 3^x - 3^{y+1} = 1 & \dots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} : 3^x \cdot 3^y = 2, \quad \text{②} : 3^x - 3 \cdot 3^y = 1$$

$3^x = X, 3^y = Y$ とおくと, $X > 0, Y > 0$ であり

$$\text{①} \Leftrightarrow XY = 2, \quad \text{②} \Leftrightarrow X - 2Y = 1$$

これらを連立させて

$$Y(2Y+1) = 2 \Leftrightarrow 2Y^2 + Y - 2 = 0 \Leftrightarrow (2Y-1)(Y+1) = 0$$

$$Y > 0 \text{ より } Y = \frac{1}{2} \text{ のとき } X = 4$$

$$\text{よって } 3^x = 4 \text{ より } x = \log_3 4, \quad 3^y = \frac{1}{2} \text{ より } y = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$$

したがって $x = \log_3 4, y = -\log_3 2$



指数関数を含む方程式や不等式は、底を揃えることが重要です。

考えてみれば、1ドル、1ユーロ、1円の価値は同じではありません。

これを比較するためには、同じ通貨の価値に換算することが必要です。

比べるという行為には、同じ基準でという条件が前提になるのです。