

90. 三角関数を含む方不等式③

$$(1) \pi < \theta < \frac{5}{3}\pi \quad (2) 0 \leq \theta < \frac{\pi}{12} \text{ または } \frac{7}{12}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(3) \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi \text{ または } \frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

$$(1) \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta < -1 \Leftrightarrow 2\left(\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta \cdot \frac{1}{2}\right) < -1 \Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{7}{6}\pi < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{したがって } \pi < \theta < \frac{5}{3}\pi$$

$$(2) \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\theta < \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin\theta \cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta \sin\frac{\pi}{6} + \cos\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ のとき } \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \text{ より}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} \text{ または } \frac{3}{4}\pi < \theta + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

$$\text{したがって } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{12} \text{ または } \frac{7}{12}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(3) (\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\cos^2\theta \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos 2\theta + \sin 2\theta \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta - \sqrt{3}\cos 2\theta \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\left\{\sin 2\theta \cdot \frac{1}{2} + \cos 2\theta \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} \geq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \dots \textcircled{1}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $-\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{3}\pi$ より

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi \quad \text{または} \quad \frac{7}{3}\pi \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{10}{3}\pi$$

したがって $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$ または $\frac{4}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi$