

89. 三角関数を含む方不等式②

$$(1) \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi \quad (2) \theta = 0, \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$(3) 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi \quad (4) \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の不等式を解け。

$$(1) \cos 2\theta < \sin \theta \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \theta < \sin \theta \Leftrightarrow 2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1 > 0 \Leftrightarrow (2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1) > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であるから

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin \theta \leq 1$$

$$\text{よって } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

$$(2) \cos 2\theta \geq \cos \theta \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta - 1 \geq \cos \theta \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta - \cos \theta - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2\cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow -1 \leq \cos \theta \leq -\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \cos \theta = 1$$

$$\text{よって } \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi \quad \text{または} \quad \theta = 0$$

$$\text{したがって } \theta = 0, \frac{2}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$(3) \cos \theta + \sin 2\theta > 0 \Leftrightarrow \cos \theta + 2\sin \theta \cos \theta > 0 \Leftrightarrow \cos \theta(2\sin \theta + 1) > 0$$

よって

$$\begin{cases} \cos \theta > 0 \\ \sin \theta > -\frac{1}{2} \end{cases} \dots \textcircled{1} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \cos \theta < 0 \\ \sin \theta < -\frac{1}{2} \end{cases} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ のとき } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$$\textcircled{2} \text{ のとき } \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{したがって } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(4) \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \geq 0 \Leftrightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) - 2(\cos \theta - \sin \theta) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta - \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta - 2) \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\cos \theta + \sin \theta - 2 < 0 \quad \text{よ} \text{り} \quad \textcircled{1} \Leftrightarrow \cos \theta - \sin \theta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta - \cos \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \left\{ \sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi \quad \text{であるから} \quad \textcircled{2} \Leftrightarrow 0 \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \pi \quad \text{よ} \text{り} \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$$