

88. 三角関数を含む方不等式①

$$(1) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi \quad (2) 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(3) 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ または } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \quad (4) 0 \leq \theta < \frac{\pi}{12} \text{ または } \frac{5}{12}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(5) \frac{\pi}{3} < \theta < \pi \text{ または } \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi \quad (6) 0 \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi \text{ または } \frac{11}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, 次の不等式を解け。

$$(1) \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ において

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ となるのは } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{よって } \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi$$

$$(2) 2\sin \theta - 1 < 0 \Leftrightarrow \sin \theta < \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ において

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \text{ となるのは } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{よって } 0 < \theta < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(3) \sin \theta < \tan \theta$$

$$\sin \theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \dots(*)$$

$$(i) \cos \theta > 0 \text{ すなわち } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \quad \dots\text{①のとき}$$

(*)の両辺に $\cos \theta$ をかけて

$$\sin \theta \cos \theta < \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta (\cos \theta - 1) < 0 \quad \dots\text{②}$$

$$\cos \theta - 1 \leq 0 \text{ より } \text{②} \Leftrightarrow \sin \theta > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < \theta < \pi \quad \dots\text{③}$$

$$\text{①かつ③より } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\cos \theta < 0$ すなわち $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3}{2}\pi$ …④のとき

(*)の両辺に $\cos \theta$ をかけて

$$\sin \theta \cos \theta > \sin \theta \Leftrightarrow \sin \theta (\cos \theta - 1) > 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\cos \theta < 0 \text{ であるから } \cos \theta - 1 < -1 \text{ より } \textcircled{5} \Leftrightarrow \sin \theta < 0 \Leftrightarrow \pi < \theta < 2\pi \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4} \text{ かつ } \textcircled{6} \text{ より } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$$

(i), (ii)より $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ または $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$



$\sin \theta < \tan \theta$ は、解答のように場合分けをする計算はなかなか面倒ですね。これは、 $y = \sin \theta$, $y = \tan \theta$ のグラフをかいて、上下関係を読み取って解を見つける方が簡単だと思います。 $y = \sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ のグラフが平行移動、拡大・縮小されている場合はグラフをかくのに手間がかかりますので、計算で押し切った方が簡単ですが。

$$(4) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

$$\text{したがって } \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} \text{ または } \frac{2}{3}\pi < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

$$\text{よって } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{12} \text{ または } \frac{5}{12}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(5) \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{3} \right) < \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より } -\frac{\pi}{3} \leq 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{3}\pi$$

$$\text{したがって } \frac{\pi}{3} < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi \text{ または } \frac{7}{3}\pi < 2\theta - \frac{\pi}{3} < \frac{11}{3}\pi$$

$$\text{よって } \frac{\pi}{3} < \theta < \pi \text{ または } \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$$

$$(6) 2\cos^2 \theta + 2 \geq -7\sin \theta \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 \theta) + 2 \geq -7\sin \theta \Leftrightarrow 2\sin^2 \theta - 7\sin \theta - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin \theta + 1)(\sin \theta - 4) \leq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ …②であるから

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ より } -\frac{1}{2} \leq \sin \theta \leq 1 \quad \text{したがって } 0 \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi \text{ または } \frac{11}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$$